

2018 年度陕西省教育科学“十三五”规划课题《基于图形计算器的高中数学函数模块的实验课程开发与教学研究》负责人，课题立项号为 SGH18B094，本文为其研究成果之一。）

技术助推 创造启智

——以“函数的叠加”为例

马 翠（陕西省西安市陕西师范大学附属中学）

摘要：融入信息技术的课堂已不仅仅是提高课堂效率，更重要的是启迪学生的智慧。以一节“函数的叠加”探究课为例，以数学图形计算器为技术工具，感受课堂中物理现实与数学图象的交融，数学本质与技术直观的互补。通过技术进行数学实验展现学生探究的百花齐放，辅助技术进行问题解决引发学生对数学问题的深度思考，进而实现技术与数学课程的深度融合。

关键词：图形计算器；函数叠加；信息技术

章建跃博士在 2017 年 12 月提出数学教学的“四理解”，在“理解数学、理解学生、理解教学”的基础上，增加了“理解技术”。《普通高中数学课程标准（2017 年版）》指出“教师应重视信息技术的运用，优化课堂教学，转变教学与学习方式。教师应注重技术与数学课程的深度融合，实现传统教学手段难以达到的效果。”由此可见，我们现阶段的问题将是如何将信息技术与数学课程进行“深度”融合。本文以“函数的叠加”一课为例，阐述信息技术与数学课程深度融合的实践与思考。

一、课题源起

1. 内容源起

在“北师大版《普通高中课程标准实验教科书·数学必修 4》”130 页信息技术应用“利用现代信息技术研究一些周期函数的合成”及 131 页阅读材料“三角函数叠加问题”中通过简单三角函数的叠加可得到并研究一般三角函数的性质。那么我们能否再推进一步，从三角函数的叠加到基本初等函数的叠加呢？能否通过基本初等函数的叠加来研究一般函数的性质呢？我们知道函数叠加是将我们函数研究的视角从基本初等函数拓展到一般函数的一类重要途径和方法。除叠加外，可以将函数作积、作商等等。本节课对函数叠加的研究思路与方法也将为学生研究函数的积、商等问题埋下探究的种子。因此，本节课的设计源于教材，是在教材必修 1、必修 4 函数研究的基础上开发的一节数学探究活动课。

2. 技术源起

图形计算器通常指一种能够绘制函数图象、解联立方程组、编写数学类程序以及执行其它各种操作的手持计算器.在数学课堂教学中，图形计算器提供了一种直观教学手段和一个实验研究的环境.在这个基于图形计算器的学习平台上，教师的教学可以更多地借助于便捷的计算、直观的图形和仿真的模拟，引导学生进行数学的实验和探究.本节课以函数知识为主线的探索，是实现图形计算器与数学课程的“深度”融合一种尝试与探索.

二、信息技术实施路径与实践反思

本节课从声波的合成这个物理实验开始，数学化为函数叠加的问题，进而进入课题.之后，利用图形计算器初识叠加函数，厘清概念.在此基础上，开展数学实验探究性质，让学生在手持技术的支持下，通过亲身操作经历再创造数学的过程.最后学以致用，运用性质，总结反思，结束本课.这种从物理实验到数学实验，再到数学本质的一次数学探究之旅是本节课的一条明线.从具体函数的叠加研究一般性质的归纳，再由一般性质解决特殊问题，从图象也就是形中来研究数的规律，又由数学规律思考形的特点，这是特殊与一般及数形结合的双向性体现，这两种基本数学思想方法是本节课的一条暗线.下面沿着两条主线具体展开.

1. 学科交融，激发兴趣

听变化：教师先分别敲击 256HZ、440HZ 的音叉，再同时敲击两音叉，让学生感受声音的变化.

看变化：学生重复上述实验，利用图形计算器通过传感器接收数据，投影显示三次敲击所成的波形图象，感受声波的变化.

(图 1, 2, 3 为三次敲击音叉后图形计算器显示的声波)

探变化：对图象拟合函数解析式，从波的合成引入函数的叠加.

(图 4 为拟合后函数表达式，图 5 为拟合后函数图象与声波图象比较)

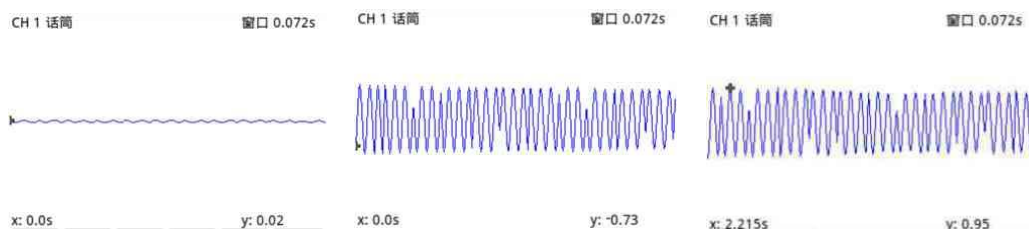


图 1

图 2

图 3

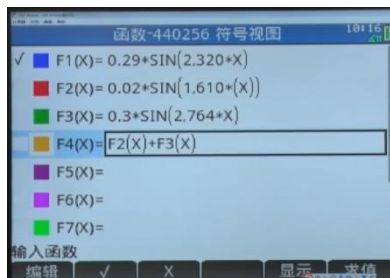
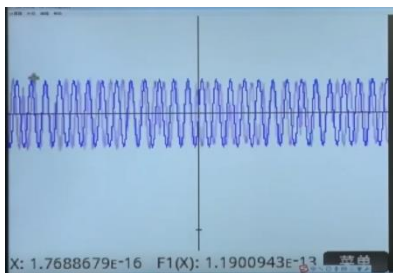


图 4

图 5

实践反思：通过物理实验激发学生兴趣，为“数学化”的过程做铺垫，通过传感器的应用，将原先只是学生“听到”的合成转化为“看见”的合成，为函数叠加提供直接素材. 虽然是一个简单的物理实验，却开启了学生的数学探究之门. 在图形计算器的帮助下进行物理现象“数学化”的过程，经历数据拟合，由声波的形拟合为函数解析式的数，再函数解析式数的叠加形成函数图象的形来匹配声波的形，感受学科间的联系与差异，体会数形结合的思想，从而由声波的合成自然引入函数的叠加.

2. 技术相助，厘清概念

(1) 温故知新

我们学过的基本初等函数有哪些？我们一般研究函数的什么性质？

(2) 概念生成

① 举例引导，概念生成

叠加函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ ，由基本函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相加而成，其定义域为两个基本函数定义域的交集. 叠加函数并不鲜见，如 $y=\sin x+\cos x$ ， $y=\sin x-\cos 2x$ ， $y=x+\frac{1}{x}$ 等 .

② 数形结合，深入理解

教师引导分析叠加函数 $y=\sin x+\cos x$ ，从数和形两个角度理解叠加函数本质（数的角度：叠加函数图象为两个基本函数图象的高度叠加. 形的角度：同一自变量，叠加函数值为两个基本函数值的和）. 本例也可直接通过三角恒等变形转化为一个三角函数来解决.

函数 数字视图			
X	F1	F2	F3
0	0	1	1
0.1	9.983342E-2	0.99500417	1.09483758
0.2	0.19866933	0.98006658	1.17873591
0.3	0.29552021	0.95533649	1.25085670
0.4	0.38941834	0.92106099	1.31047934
0.5	0.47942554	0.87758256	1.35700810
0.6	0.56464247	0.82533561	1.38997809
0.7	0.64421769	0.76484219	1.40905987
0.8	0.71735609	0.69670671	1.41406280
0.9	0.78332691	0.62160997	1.40493688
0			

图 6

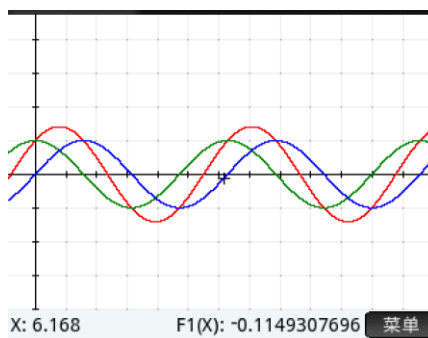


图 7

(图 6, 图 7 分别为图形计算器 NUM 与 PLOT 视图下显示的函数)

实践反思: 基本初等函数的回顾为叠加函数的构造提供了素材, 叠加函数的概念在几个具体实例中呼之欲出. 接着对函数的叠加从微观点的角度进行了深入理解, 利用图形计算器函数应用的数字视图很方便地从表格中观察点的坐标构成, 利用图形视图很直观地从图象中观察点的高度规律, 因而从数与形双角度挖掘叠加的本质. 为使学生在探究学习中“想有方向, 做有收获”, 温故知新及图形计算器的示范使用也为后续学生开展数学实验提供了基本思路和技术方法.

3. 数学实验, 创造启智

(1) 小组实验: 两人一组进行数学实验, 要求如下:

①选定方向: 奇偶性、周期性、单调性任选其一进行研究;

②实验观察: 选择叠加函数, 先思考再作图或先作图再思考, 探究具体函数性质, 再利用数学知识解释, 总结一般结论;

(2) 总结汇报: 一人操作, 一人讲解 (从图形和数学两方面).

预设结论: 一般地, 两个函数叠加, 同奇得奇, 同偶得偶, 一奇一偶可非奇非偶; 可以由非奇非偶函数叠加构造奇函数或者偶函数; 两个周期函数的叠加还是周期函数, 其周期一般是原函数周期的最小公倍数; 周期函数与非周期函数叠加一般为非周期函数; 两个函数叠加, 同增得增, 同减得减; 两个函数单调性不一致时, 叠加函数的单调性依赖于这两个函数变化的快慢等等.

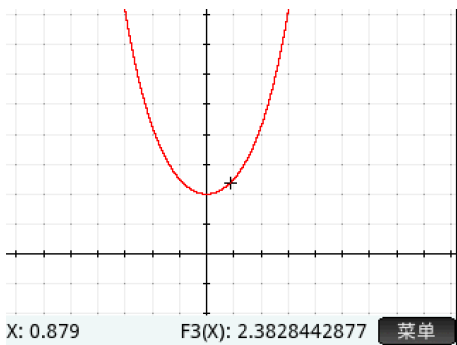


图 8

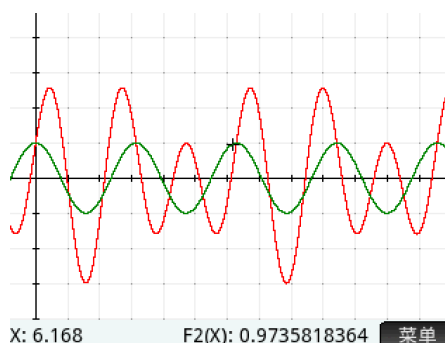


图 9

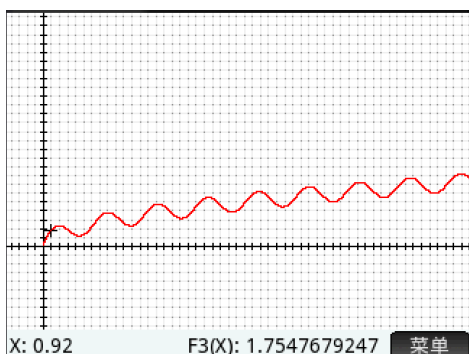


图 10

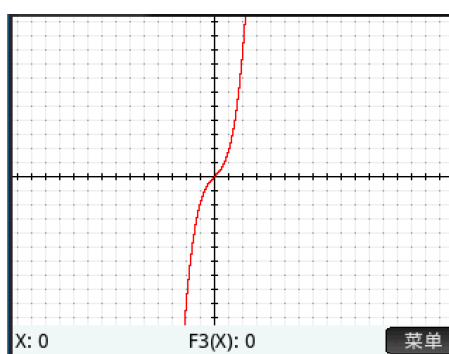


图 11

(图 8 为函数 $y = 2^x + 2^{-x}$ 的图象, 图 9 为函数 $y = \cos 2x$ 与 $y = 2 \sin 3x + \cos 2x$ 的图象, 图 10 为函数 $y = \sin x + x^{0.5}$ 的图象, 图 11 为函数 $y = \sin x + x^3$ 的图象)

实践反思: 在没有技术的传统教学下, 教师一般会带领学生通过列表、描点作图的方法, 将叠加函数的图象画出来, 还要将叠加前的基本函数也画出来, 再进行逐一比较, 探究性质, 这样以来花了大量的时间在重复的描点作图上. 也有教师采取几何画板进行演示教学, 尽管节省了时间, 但没有学生亲自动手. 基于此, 在图形计算器的这样的手持技术支持下, 问题便迎刃而解, 将节省的时间用于探索更多函数, 用于充分地数学思考, 同时, 教师可利用局域网环境下可以实时关注和调出每位学生的计算器使用界面, 便于师生、生生之间的互动, 学生不必到讲台上展示, 在放松和谐的状态下紧凑地开展探究. 学生分组自主探讨的典型函数有 $y = \sin x + \sin 2x$, $y = \cos x - x^2$, $y = x^2 + x^3$, $y = 2^x + 2^{-x}$, $y = 2^x - 2^{-x}$, $y = \sin 2x - \cos 2x$, $y = x + \cos 2x$, $y = \sin x + \cos 2x$, $y = 2 \sin x + \cos \frac{x}{2}$, $y = 2 \sin 3x + \cos 2x$,

$$y = x^3 + \ln x, \quad y = 0.5^x - \ln x, \quad y = x + \frac{1}{x}, \quad y = \sin x + x^3, \quad y = \sin x + x^{0.5}, \quad y = \sin x + x^2 \text{ 等}$$

等. 通过探究, 学生根据自己的情况, 有的小组选择了较简单的函数; 有的小组选择了较复杂的函数; 有的小组探究的结论不正确: 例如在探究周期性时, 有一个小组由于函数选择的特殊性获得的结论是两周期函数叠加后的周期是两函数周期较大者的周期, 之后另一个小组通过研究更一般的函数举出了反例 (如图 9), 纠正了结论. 生生思维的碰撞创造了“数学真理”; 有的小组并没有探究出数学上抽象明确的结论: 例如探究 $y = \sin x + x^3$ 的单调性时, 学生利用图形计算器看到函数图象图 10、11 后凭直觉说该函数之所以为增函数是因为 $y = x^3$ 这个函数很牛很厉害. 学生生动形象的语言展现了学生的智慧与思考, 尽管导数的概念没有学习, 此时学生已经感受到了增长是有快慢之别, 为后期的学习埋下了伏笔. 尽管小组探究各有差异, 或许“不尽人意”, 但这都不影响学生探究的热情, 课堂也正是在生生互补, 师生互动中体现出无穷的活力与魅力.

4. 技术助推 启迪智慧

函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的最小正周期为 ()

- (A) 4π (B) 2π (C) π (D) $\frac{\pi}{2}$

(1) 思考猜想: 学生先思考, 猜测答案, 通过图形计算器投票功能反馈学生结果.

(2) 验证探究: 请学生利用图形计算器作图, 发现猜想错误 (正确答案为 D), 观察图象, 思考机器作图背后的数学原理是什么?

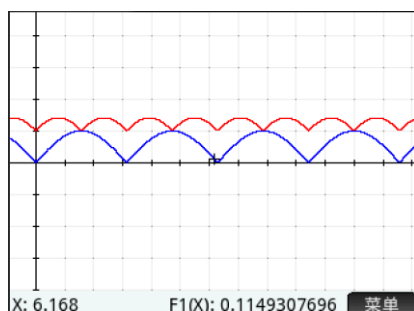


图 12

(图 12 为函数 $y = |\sin x|$ 与 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的图象)

实践反思: 本题是一个最小正周期问题, 叠加前两个函数 $y = |\sin x|$, $y = |\cos x|$ 的最小正周期均为 π , 根据前面的探究结论可知 π 也为叠加函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的周期. 但

学生容易忽略最小正周期和周期的区别，从而得出错误结论 C。顺势利用图形计算器验证结论，发现正确答案为 D，产生认知冲突，激发探究热情，结合图象探讨背后的数学本质。学生通过图形计算器的图象观察周期为 $\frac{\pi}{2}$ ，启发学生进一步思考原因，分组讨论。通过讨论，学生从数的角度回到绝对值问题的研究本质，通过分类讨论将函数可化为分段函数形式，如下：

$$y = \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right] \\ -\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ -\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \end{cases}$$

再次引发思考，在一个 2π 的周期内，四段函数解析式本应画不同的四段函数图象，怎么图象在一个 2π 周期里的四段函数图象是一样的呢？在数形看似“矛盾”的思考下，学生发现解析式中后一段函数可由前一段函数向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到，问题迎刃而解。由形思数，

以数释形，数形互补，工具支撑，创造启智！

三、写在最后

本节课的四个环节分别为一个物理实验引出课题，一个演示实验厘清概念，一个数学实验探究问题，一个问题解决启发思维，无一不体现信息技术的支撑。融入信息技术的课堂已不仅仅是提高课堂效率，更重要的是启迪智慧。在数学探究问题中，图形计算器作为一种工具，或者先用工具找到方向，或者后用工具验证猜想，确实给了我们一种新的学习方式，有时也可启发学生进一步思考，但不能代替学生的思考。本节课既要利用技术去发现结论，也要引导学生去思考背后的数学本质。只有将技术与思维达到共融与平衡，我们才能达到解决问题的目的，这也是每节使用技术的课堂需要思考的问题。通过恰当的技术使用，将学生的数学实验与数学思考紧密的联系在一起，时常能迸发出智慧的火花。借助实验室的图形计算器手持技术，学生在多方面、多层次、多样化的数学活动中体会问题的发生、发展、变化和深化的过程。从学生上课的状态和课后的反思来看，本节课学生收获满满，意犹未尽，这样也坚定了笔者继续研究和开发基于图形计算器数学课程的决心。同时期望教师的研究也给学生提供更多的平台。

参考文献：

- [1]史炳星. 谈谈图形计算器对我国数学教育的影响[J]. 数学教育学报, 2001 (1): 38-40.
- [2]沈婕. 图形计算器与高中数学教学整合的实践研究[J]. 中国数学教育, 2017 (4) : 55-61.
- [3]张志勇. 中学数学微实验的设计原则及开发途径——基于 HP Prime 平台[J]. 数学教育学报, 2017 (4): 25-29 .
- [4]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M], 人民教育出版社, 2017.