



厚积薄发 迎接挑战

考前最后阶段的科学安排

主讲人：韩永权

单 位：山西大学附属中学



1

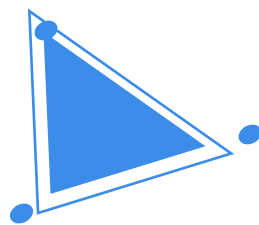
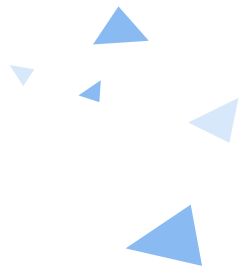
教师教学建议

2

学生复习建议

01

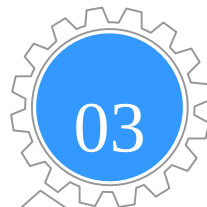
教师教学建议





教师教学建议

发现背景，提升能力



精编试题，选好载体



学习考纲，钻研考题



有效课堂，注重落实





学习考纲，钻研考题

准确把握高考数学命题的特点和方向是提高复习效率的必要条件。考试说明明确地告诉我们高考考什么、考多难、怎样考，而高考试题是考试说明的具体体现，因此要认真研读高考考试说明，认真分析高考数学试题，不仅要明确考试的内容，更要对知识点的能力要求了然于心，找准高考数学命题的特点，把握高考数学命题的方向，让我们的复习更有针对性、有效性，有的放矢，减少盲目性，使宝贵的复习时间发挥最大的效用。



学习考纲，钻研考题

高考真题是最好的教学素材，在练习高考试题的过程中，总结发现高考试题的命题规律和试题特点，再针对性地选题和拓展训练，强化通性与通法，避免偏题与怪题，有效提高复习效率。

例如，我们发现历年的高考考查“三角函数与解三角形”的解答时都用“三角形”作为命题背景，重点考查正弦定理与余弦定理的运用，兼顾考查了三角形的性质、三角函数的概念与公式、简单的三角恒等变换等。因此，我们可以在学习过程中有意识地加强同类型问题的针对性训练，要注意控制好难度，紧扣教材、夯实基础。在复习过程中，做到源于课本、高于课本。

学习考纲，钻研考题

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

2018年全国1卷理科

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

22. (本小题满分13分)

2011年湖南卷文科

设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(II) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 记过点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ 的直线斜率为 k .

问: 是否存在 a , 使得 $k = 2 - a$? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

学习考纲，钻研考题

2018年理21

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

思路一:

根据导函数范围讨论



$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} - a \right)$$

思路二:

按照判别式、二次项系数讨论



$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$$

(1) $\Delta \leq 0$ 即 $-2 \leq a \leq 2$;

(2) $\Delta > 0$ 即 $a < -2$ 或 $a > 2$

学习考纲，钻研考题

思路一：先代入函数值化简再用韦达定理代入消元

由（1）知， $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$.

因为极值点 x_1, x_2 满足方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ ，所以 $x_1 x_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$ ，则 $x_2 > 1$.

$$\text{由于 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{-2 \ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2},$$

$$\text{所以 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < -2 + a \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0,$$

设 $g(x) = \frac{1}{x} - x + 2 \ln x, x \geq 1$ ，则由（1）知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

又因为 $g(1) = 0$ ，所以 $g(x) < 0, x > 1$ ，则 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$.

学习考纲，钻研考题

思路二：先移项变形再用韦达定理代入消元

由 (1) 知， $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$.

因为极值点 x_1, x_2 满足方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ ，所以 $x_1 x_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$ ，则 $x_2 > 1$.

$$\text{由于 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > (a - 2)(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 - \frac{1}{x_2} + x_2 - a \ln x_2 > (a - 2)(x_1 - x_2) \Leftrightarrow 2x_2 - \frac{2}{x_2} + a \ln \frac{1}{x_2} - a \ln x_2 > (a - 2)(x_1 - x_2)$$

设 $g(x) = \frac{1}{x} - x + 2 \ln x$, $x \geq 1$ ，则由 (1) 知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

又因为 $g(1) = 0$ ，所以 $g(x) < 0, x > 1$ ，则 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$.

学习考纲，钻研考题

思路三：设比值消元

(2) 因为 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = a > 0 \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases}$.

$$\text{所以要证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1\right) - \left(\frac{1}{x_2} - x_2 + a \ln x_2\right)}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} < a - 2,$$

$$\text{即证 } \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} < 1 \text{ ①, 不妨设 } x_1 > x_2, \text{ 即证 } 0 < \ln \frac{x_1}{x_2} < x_1 - x_2,$$

$$\text{两边平方得 } \left(\ln \frac{x_1}{x_2}\right)^2 < (x_1 - x_2)^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2,$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2} > 1, \text{ 即证 } \ln^2 t < t + \frac{1}{t} - 2.$$

学习考纲，钻研考题

思路四：利用韦达定理消元后转化为对数平均不等式

由 (1) 知 $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$. 因为 x_1, x_2 极值点满足方程 $x^2 - ax + 1 = 0$, 所以 $x_1 x_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 > 1$.

$$\text{由于 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$$

$$\text{下证: } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}}, \text{ 事实上, } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \Leftrightarrow \ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}},$$

$$\text{令 } t = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < 1, \text{ 则等价于证明 } \ln t^2 > \frac{t^2 - 1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{t} - t + 2 \ln t > 0, \quad t < 1.$$

思路五：代入极值点和极值转化为a的函数

由 (1) 知 $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$. 因为极值点 x_1, x_2 满足方程 $x^2 - ax + 1 = 0$,

可得 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, 且 $x_1 x_2 = 1$. 则 $f(x_1) - f(x_2) = 2\sqrt{a^2 - 4} + 2a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$,

因为 $x_1 - x_2 = -\sqrt{a^2 - 4}$, 所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -2 + \frac{2a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}}{-\sqrt{a^2 - 4}}$,

则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2 \Leftrightarrow \frac{2 \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}}{-\sqrt{a^2 - 4}} < 1 \Leftrightarrow 2 \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} > -\sqrt{a^2 - 4}$.

令 $g(a) = 2 \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \sqrt{a^2 - 4}$, $a \geq 2$, 则 $g'(a) = 2 \frac{1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4}}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4}} = \frac{-2 + a}{\sqrt{a^2 - 4}} > 0$,

学习考纲，钻研考题

19. (12 分)

2018年全国1卷理科

设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F ，过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点，点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

$$k_1 = k_2$$

(2) 设 O 为坐标原点，证明： $\angle OMA = \angle OMB$.

(20)(本小题满分 12 分)

2015年全国1卷理科

在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $y = kx + a (a > 0)$ 交于 M, N 两点，

(I) 当 $k = 0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程；

(II) y 轴上是否存在点 P ，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM = \angle OPN$ ？说明理由.

历年高考题是最好的备考资料！

学习考纲，钻研考题

解法一：(2) 当 l 与 x 轴垂直时， OM 为 AB 的垂直平分线，所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

当 l 与 x 轴不垂直时，设 l 的方程为 $y = k(x-1)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 < \sqrt{2}$ ， $x_2 < \sqrt{2}$ ，

直线 MA ， MB 的斜率之和为 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$.

由 $y_1 = kx_1 - k$ ， $y_2 = kx_2 - k$ 得， $k_{MA} + k_{MB} = \frac{2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$.

将 $y = k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 得 $(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$.

所以， $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}$ ， $x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$.

则 $2kx_1x_2 - 3k(x_1 + x_2) + 4k = \frac{4k^3 - 4k - 12k^3 + 8k^3 + 4k}{2k^2 + 1} = 0$.

从而 $k_{MA} + k_{MB} = 0$ ，故 MA ， MB 的倾斜角互补. 所以 $\angle OMA = \angle OMB$ ，综上， $\angle OMA = \angle OMB$.

学习考纲，钻研考题

解法二：当 l 与 x 轴重合时， $\angle OMA = \angle OMB = 0^\circ$ 。

当 l 与 x 轴不重合时，设直线 $l: x = my + 1$ ，它与椭圆相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点，

$$\text{联立得} \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{化简得 } (my + 1)^2 + 2y^2 - 2 = 0, \text{ 即 } (m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0,$$

$$\because \Delta = 4m^2 + 4(m^2 + 2) > 0 \therefore y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 2}$$

$$\therefore k_{AM} + k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_1(x_2 - 2) + y_2(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{y_1(my_1 - 1) + y_2(my_1 - 1)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$$

$$\because 2my_1 y_2 - (y_1 + y_2) = 2m \frac{-1}{m^2 + 2} - \frac{-2m}{m^2 + 2} = 0$$

$\therefore k_{AB} + k_{BM} = 0$, 故 MA, MB 的倾斜角互补. 所以 $\angle OMA = \angle OMB$ 。

学习考纲，钻研考题

解法 2: 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \cos \alpha \\ y=t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数)。(*)

将(*)式代入椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中, 整理得 $(1 + \sin^2 \alpha)t^2 + 2 \cos \alpha t - 1 = 0$ 。

$$\text{则 } t_1 \cdot t_2 = \frac{-1}{1 + \sin^2 \alpha} \quad t_1 + t_2 = -\frac{2 \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}。$$

又 $A(1 + t_1 \cos \alpha, t_1 \sin \alpha), B(1 + t_2 \cos \alpha, t_2 \sin \alpha)$,

则 $k_{MA} + k_{MB} =$

$$\frac{t_1 \sin \alpha}{1 + t_1 \cos \alpha - 2} + \frac{t_2 \sin \alpha}{1 + t_2 \cos \alpha - 2} =$$

$$\frac{t_1 \sin \alpha}{t_1 \cos \alpha - 1} + \frac{t_2 \sin \alpha}{t_2 \cos \alpha - 1} =$$

$$\frac{t_1 \sin \alpha (t_2 \cos \alpha - 1) + t_2 \sin \alpha (t_1 \cos \alpha - 1)}{(t_1 \cos \alpha - 1)(t_2 \cos \alpha - 1)} =$$

$$\frac{2t_1 t_2 \sin \alpha \cos \alpha - (t_1 + t_2) \sin \alpha}{(t_1 \cos \alpha - 1)(t_2 \cos \alpha - 1)} =$$

$$\frac{-2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = 0,$$

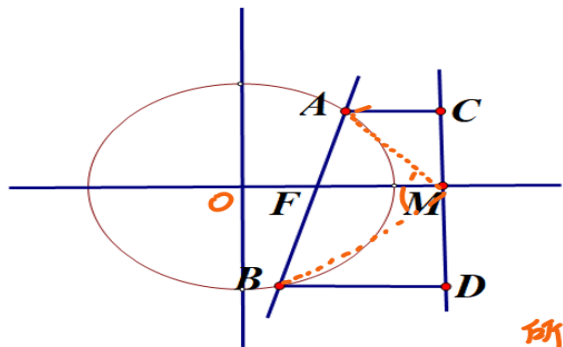
即 $k_{MA} = -k_{MB}$ 。

所以 $\angle OMA = \angle OMB$ 。



学习考纲，钻研考题

方法三：椭圆的第二定义，结合角平分线的性质。



要证 $\angle CMA = \angle CMB$. 需证 $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|AF|}{|BF|}$
因为 $\frac{|AF|}{|AC|} = e$ $\frac{|BF|}{|BD|} = e$ $\therefore \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ ①
因为 $AC \parallel FM \parallel BD$ $\therefore \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|CM|}{|DM|}$ ②
由①②得 $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|CM|}{|DM|}$. 又 $\angle ACM = \angle BDM = \frac{\pi}{2}$
所以 $\triangle ACM \sim \triangle BDM$ 所以 $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|AF|}{|BF|}$ 得证

学习考纲，钻研考题

方法 4: 以椭圆的右焦点为极点, x 轴正方向为极轴,
$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases},$$

代入椭圆的方程中, 可得 $\rho = \frac{1}{\sqrt{2 + \cos \theta}}$ 。

设 $A(\rho_1, \theta), B(\rho_2, \theta + \pi)$, 由余弦定理, 可得 $|AM|^2 = \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos \theta + 1$ 。

$$\begin{aligned} |BM|^2 &= \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos(\theta + \pi) + 1, \text{ 所以} \\ \frac{|AM|}{|AF|} &= \frac{\sqrt{\rho_1^2 - 2\rho_1 \cos \theta + 1}}{\rho_1} = \sqrt{1 - 2 \cos \theta} = (\sqrt{2 + \cos \theta}) + (\sqrt{2 + \cos \theta})^2 = \sqrt{3 - \cos^2 \theta}。 \end{aligned}$$

同理可得, $\frac{|BM|}{|BF|} = \frac{\sqrt{\rho_2^2 + 2\rho_2 \cos \theta + 1}}{\rho_2} = \sqrt{3 - \cos^2 \theta}$, 由角平分线性质可知, 命题得证。

学习考纲，钻研考题

解法 5: 设点 O (也可选点 F) 到直线 MA, MB 的距离分别为 d_1, d_2 , 根据角平分线定理 1 的逆定理, 要证 $\angle OMA = \angle OMB$, 只需证 $d_1 = d_2$ 。

当直线 l 的斜率为 0 时, 易得 $d_1 = d_2 = 0$ 。

当直线 l 的斜率不为 0 时, 设直线 l 的方程为: $x = my + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ x = my + 1, \end{cases}$ 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$, $\Delta > 0$ 恒成立, $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}$ 。

直线 MA 的方程为: $y_1 x - (x_1 - 2)y - 2y_1 = 0$, $d_1 = \frac{|2y_1|}{\sqrt{y_1^2 + (x_1 - 2)^2}}$ 。

因为点 A 在直线 l 上, 所以 $x_1 = my_1 + 1$, 故 $d_1 = \frac{|2y_1|}{\sqrt{(m^2 + 1)y_1^2 - 2my_1 + 1}}$ 。

同理, $d_2 = \frac{|2y_2|}{\sqrt{(m^2 + 1)y_2^2 - 2my_2 + 1}}$ 。 $d_1^2 - d_2^2 = \frac{4(y_1 - y_2)[(y_1 + y_2) - 2my_1 y_2]}{[(m^2 + 1)y_1^2 - 2my_1 + 1][(m^2 + 1)y_2^2 - 2my_2 + 1]}$ 。

因为 $(y_1 + y_2) - 2my_1 y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2} + \frac{2m}{m^2 + 2} = 0$, 以 $d_1^2 - d_2^2 = 0$, 即 $d_1 = d_2$ 。

综上所述, $\angle OMA = \angle OMB$ 。



发现背景，提升能力

中学数学中的知识背景有：

极点与极线

2

1

阿基米德三角形

3

阿波罗尼斯圆

拉格朗日中值定理

4

5

泰勒展开式

平面向量中的等和线

6

7

蒙日圆

这些背景知识的高考试题频繁出现.

发现背景，提升能力

(2018 全国 3 卷 16) 已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\angle AMB = 90^\circ$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

解法一: $\because$ 抛物线 $C: y^2 = 4x$, 的焦点 $F(1,0)$,

$\therefore$ 过 A, B 两点的直线方程为 $y = k(x-1)$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x-1) \end{cases}$ 可得 $k^2x^2 - 2(2+k^2)x + k^2 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2(k^2+2)}{k^2}$, $x_1x_2 = 1$,

$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 2) = \frac{4}{k}$, $y_1y_2 = k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1) = k^2[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = -4$,

$\because M(-1,1)$, $\therefore \overrightarrow{MA} = (x_1 + 1, y_1 - 1)$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 + 1, y_2 - 1)$,

$\because \angle AMB = 90^\circ \therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \therefore (x_1 + 1)(x_2 + 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0$,

整理可得, $x_1x_2 + (x_1 + x_2) + y_1y_2 - (y_1 + y_2) + 2 = 0$,

$\therefore 1 + 2 + \frac{4}{k^2} - 4 - \frac{4}{k} + 2 = 0$, 即 $k^2 - 4k + 4 = 0$, $\therefore k = 2$.

小题大做，太繁琐！

发现背景，提升能力

(2018 全国 3 卷 16) 已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\angle AMB = 90^\circ$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

解法二: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_1^2 - y_2^2 = 4(x_1 - x_2) \\ y^2 = 4x_2 \end{cases}$

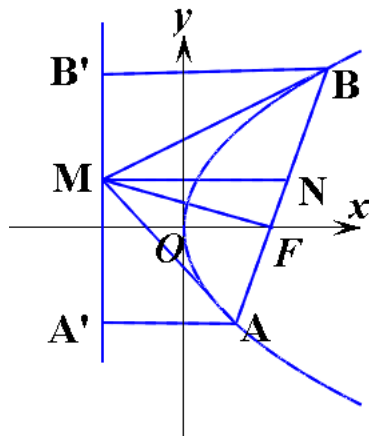
$$\therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}, \text{ 取 } AB \text{ 的中点 } N(x_0, y_0)$$

分别过 A, B 作准线 $x = -1$ 的垂线, 垂足分别为 A', B' ,

$$\because \angle AMB = 90^\circ, \text{ 所以 } |MN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|),$$

又因为点 N 为 AB 的中点, 所以 MN 平行于 x 轴,

所以 $y_0 = 1$, 即 $y_1 + y_2 = 2$, 所以 $k = 2$.



对于抛物线问题, 二级结论较多, 应该熟记, 可以达到快速解题。
这是尖子生必备的素质!

发现背景，提升能力

解法三： 三角形 $\triangle MAB$ 称为阿基米德三角形，

设抛物线 $y^2 = 2px$ 上的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$ ，过 F 的直线方程为 $x = my + \frac{p}{2}$ ，联立方程，

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x = my + \frac{p}{2} \end{cases}, \text{ 可得 } y^2 - 2pmy - p^2 = 0, \therefore y_1 + y_2 = 2pm, \quad y_1 y_2 = -p^2$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，过 A, B 两点分别作 $y^2 = 2px$ 两条切线，切线方程分别为

$$yy_1 = 2p \frac{x+x_1}{2}, \quad yy_2 = 2p \frac{x+x_2}{2}, \quad \text{设两切线的交点坐标 } M(x_0, y_0),$$

$$\text{则有 } \begin{cases} x_0 = \frac{y_1 y_2}{2p} = -\frac{p}{2} \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = pm \end{cases} \therefore k_{MF} = \frac{pm}{-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}} = -m, \quad \because k_{MF} \cdot k_{AB} = -1, \quad \therefore MF \perp AB$$



发现背景，提升能力

逆定理：若 M 在 $y^2 = 2px$ 的准线上，且 $MA \perp MB$ ，则 MA, MB 是抛物线的两条切线

证明：过 A, B 分别作抛物线的两条切线，设它们交于点 M' ，由结论 1 知， M' 在 $y^2 = 2px$ 的准线上，且 $M'A \perp M'B$ ，由抛物线的焦点弦的性质知， $x = -\frac{p}{2}$ 是以 AB 为直径的圆的切线，又 M 在 $x = -\frac{p}{2}$ 上，且 $MA \perp MB$ ，则可得 M' 与 M 重合。

所以 MA, MB 是抛物线的两条切线。

对于本题而言，利用逆定理， $\triangle MAB$ 为阿基米德三角形， $\therefore M(-1, 1), F(1, 0), \therefore k_{MF} = -\frac{1}{2}$

由 $MF \perp AB$ ，可得 $k = 2$

高观点下的初等
数学教学是培养
尖子生的一条重
要途径！

发现背景，提升能力

1 泰勒公式知识的回顾:

定理 1^[1] 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x , 在 x_0 与 x 之间至少存在一点 ξ , 使得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ 称为余项, 上式称为 n 阶泰勒公式;

若 $x_0 = 0$, 则上述的泰勒公式称为麦克劳林公式,

$$\text{即 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

发现背景，提升能力

若 $x_0 = 0$ ，则上述的泰勒公式称为麦克劳林公式，

$$\text{即 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

(1) 原始: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!};$

(2) 替换: $e^{-x} = 1 + \frac{-x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{-x^3}{3!} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!};$

(3) 相减: $e^x - e^{-x} = 2\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right);$

(4) 不等: $e^x - e^{-x} > 2\left(x + \frac{x^3}{6}\right) \quad (x > 0)$, 说明一下强调 $x > 0$ 不等式才成立, 丢掉了正项;

(5) 藏参: $e^x - e^{-x} > k\left(x + \frac{x^3}{6}\right) \quad (x > 0);$

(6) 变易: $e^x - e^{-x} > k\left(x + \frac{x^3}{6}\right) \quad (0 < x < 1),$

发现背景，提升能力

若 $x_0 = 0$ ，则上述的泰勒公式称为麦克劳林公式，

$$\text{即 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$\text{泰勒公式 } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$(1) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$(2) \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (\text{将 (1) 式 } x \text{ 换成 } -x)$$

$$(3) \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad (\text{将 (1) - (2) 可得})$$

$$(4) \ln(1+x) - \ln(1-x) > 2 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \quad (x > 0) \quad (\text{丢掉 (3) 中 } \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \text{ 正项})$$

$$(5) \ln(1+x) - \ln(1-x) > k \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \quad (x > 0) \quad (\text{将常数 2 藏起来变成参数 } k, \text{ 求上面这个式子}$$

恒成立，让你来求参数 k)



发现背景，提升能力

定理 曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条互相垂直的切线的交点 P 的轨迹是圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

结论中的圆就是蒙日圆.

高考题 (2014 年高考广东卷文科、理科第 20 题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

的一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若动点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 外一点, 且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直, 求点 P

的轨迹方程.

答案: (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; (2) $x^2 + y^2 = 13$.

这道高考题的背景就是蒙日圆.

普通高中课程标准实验教科书《数学 2 · 必修 · A 版》(人民教育出版社, 2007 年第 3 版, 2014 年第 8 次印刷) 第 22 页对画法几何的创始人蒙日(G.Monge, 1745-1818)作了介绍.

极点与极线背景下的高考试题

极点与极线是高等几何中的重要概念，当然不是《高中数学课程标准》规定的学习内容，也不属于高考考查的范围，但由于极点与极线是圆锥曲线的一种基本特征，因此在高考试题中必然会有所反映，自然也会成为高考试题的命题背景.

作为一名中学数学教师，应当了解极点与极线的概念，掌握有关极点与极线的基本性质，只有这样，才能“识破”试题中蕴含的有关极点与极线的知识背景，进而把握命题规律.

1. 从几何角度看极点与极线

定义 1 如图 1，设 P 是不在圆锥曲线上的一点，过 P 点引两条割线依次交圆锥曲线于四点 E, F, G, H ，连接 EH, FG 交于 N ，连接 EG, FH 交于 M ，则直线 MN 为点 P 对应的极线. 若 P 为圆锥曲线上的点，则过 P 点的切线即为极线.

由图 1 同理可知， PM 为点 N 对应的极线， PN 为点 M 对应的极线. 因而将 MNP 称为自极三点形. 设直线 MN 交圆锥曲线于点 A, B 两点，则 PA, PB 恰为圆锥曲线的两条切线.

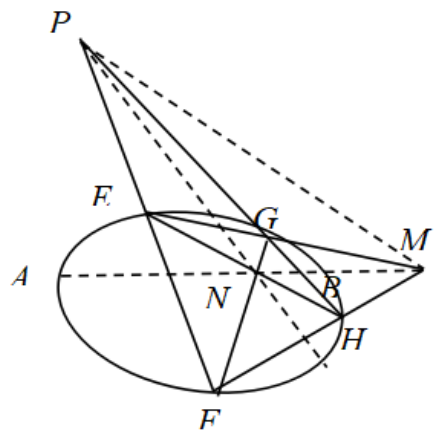


图 1

发现背景，提升能力

定理 1

- (1) 当 P 在圆锥曲线 Γ 上时，则点 P 的极线是曲线 Γ 在 P 点处的切线；
- (2) 当 P 在 Γ 外时，过点 P 作 Γ 的两条切线，设其切点分别为 A, B ，则点 P 的极线是直线 AB (即切点弦所在的直线)；
- (3) 当 P 在 Γ 内时，过点 P 任作一割线交 Γ 于 A, B ，设 Γ 在 A, B 处的切线交于点 Q ，则点 P 的极线是动点 Q 的轨迹。

2. 从代数角度看极点与极线

定义 2 已知圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ ，则称点 $P(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax_0x + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0$ 是圆锥曲线 Γ 的一对极点和极线。

事实上，在圆锥曲线方程中，以 x_0x 替换 x^2 ，以 $\frac{x_0+x}{2}$ 替换 x ，以 y_0y 替换 y^2 ，以 $\frac{y_0+y}{2}$ 替换 y 即可得到点 $P(x_0, y_0)$ 的极线方程。

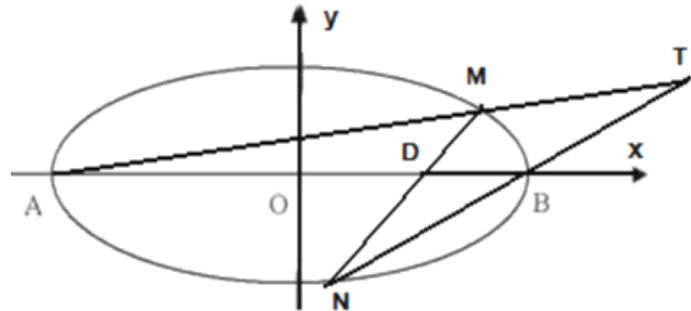
特别地：

- (1) 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ ；
- (2) 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ ；
- (3) 对于抛物线 $y^2 = 2px$ ，与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $y_0y = p(x_0 + x)$ 。
- (4) 如果圆锥曲线是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，当 $P(x_0, y_0)$ 为其焦点 $F(c, 0)$ 时，极线恰为椭圆的准线；如果圆锥曲线是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，当 $P(x_0, y_0)$ 为其焦点 $F(c, 0)$ 时，极线恰为双曲线的准线；如果圆锥曲线是抛物线 $y^2 = 2px$ ，当 $P(x_0, y_0)$ 为其焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 时，极线恰为抛物线的准线。

发现背景，提升能力

(2010 江苏文理)18、(本小题满分 16 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右顶点为 A 、 B ，右焦点为 F 。设过点 $T(t, m)$ 的直线 TA 、 TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$ ，其中 $m > 0, y_1 > 0, y_2 < 0$ 。



- (1) 设动点 P 满足 $PF^2 - PB^2 = 4$ ，求点 P 的轨迹；
- (2) 设 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}$ ，求点 T 的坐标；
- (3) 设 $t = 9$ ，求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点（其坐标与 m 无关）。

(2006 年全国卷 II 理 21) 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ， A, B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$ ，过 A, B 两点分别作抛物线的切线，并设其交点为 P 。

- (1) 证明 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 为定值；
- (2) 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S ，写出 $S = f(\lambda)$ 的表达式，并求 S 的最小值。

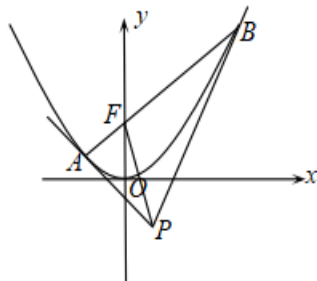


图 8

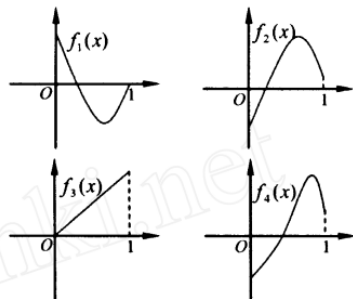
高等数学背景下的高考数学命题探析

江苏省海安高级中学

226600

董裕华

近年来高等数学的基本思想、基本方法和基本问题为高考试题的命制提供了新的背景和新的思路,这主要源于两个因素:一是高考要考查学生的能力,尤其是创新学习的能力,就需要有一个比较公平又有区分度的知识背景.高等数学的一些内容可以通过初等数学的方法和手段解决,是考查学生进一步学习潜能的良好素材;二是随着高考命题改革的逐步深入,自主命题的省市越来越多,命题组成员中大学教师占绝对优势,他们在命题时不可能不受自身研究背景的影响.代数推理、组合不等式、分段函数的构造、递推数列、极限方法的应用、导数的应用、不动点问题、折纸术、函数图象的凸性、求极限的两边夹法则、中值定理、数列极限的一些特性等具有高等数学倾向的问题逐步走进高考,虽然它们对解题方法的逻辑依据要求不高,但通过直观化,却可以



A. $f_1(x)$ 与 $f_3(x)$

B. $f_2(x)$

C. $f_2(x)$ 与 $f_3(x)$

D. $f_4(x)$

本题考查的背景就是高等数学中凸函数的定义:设 f 为定义在区间 I 上的函数,若对 I 上任意两点 x_1, x_2 和任意实数 $\lambda \in (0, 1)$,总有 $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$, 则称 f 为 I 上的凸函数;反之,若 $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$,

高等数学背景下的函数与不等式高考试题分析

李明生

(武汉体育学院 文化教研室,湖北 武汉 430079)

摘要 以高等数学中的有关知识为背景,从连续函数在闭区间上的性质、严格凸函数的性质、詹森不等式三个方面对近几年来全国及各省、市部分高考题,特别是高考压轴题中的函数与不等式综合题进行了分析和解答。

关键词 函数;不等式;导数;单调性

中图分类号 G633.66

文献标识码 A

文章编号 1003-8078(2009)06-021-04

College Entrance Examination analysis of function and inequality with advanced mathematics

LI Ming-sheng

(Department of Training, Wuhan Institute of Physical Education, Wuhan 430079, Hubei, China)

Abstract With related knowledge of advanced mathematics, we apply the properties of continuous function in closed interval and rigorous convex function, and Jensen's inequality to analyse and solve some test questions of the College Entrance Examination in recent years, especially the compositive questions of function and inequality.

Key words function; inequality; derivative; monotone

随着高考制度改革的不深化,全国以及各省、市自主命题的高考试题不断有所创新。这种创新一方面体现在更加重视对学生能力的考查;另一方面体现在更加注重对数学思想和数学知识应用的考查。它的一个体现就是高考数学题中出现了以高等数学知识为背景的题目。近几年来,以高等数学知识为背景的函数与不等式综合题在高考中频繁出现,并且常常充当了压轴题的角色。此类试题有以下特点:

高考数学巧遇拉格朗日中值定理

杨文萍

华南师范大学数学科学学院 510631

陈 铿

华南师范大学教育科学学院 510631

教师版

摘 要:高中数学新课程新增加了近、现代数学思想,这为中学传统的教学内容注入了活力,也为解决一些初等数学问题的方法提供了更多的选择.尤其在近几年的高考中,出现了以拉格朗日定理为背景的试题.本文并非想要用拉格朗日中值定理结论来解决高考题,因为前人已经做的够多了,在此本文是试图探索运用拉格朗日中值定理的思想来解决高考题,体现的是高观点下的初等数学.

关键词:拉格朗日中值定理;高考题;不等式

① 拉格朗日中值定理及其证明

拉格朗日中值定理,若函数 f 满足如下条件:

(I) f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(II) f 在开区间 (a, b) 内可导;

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明: 设 $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) - k(b - a) = 0$.

构造辅助函数 $g(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$, 则 $g'(x) = f'(x) - k$.

由于 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, $g(a) = g(b) = 0$.

根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使

(II) 证 先考虑要证的不等式 $0 <$

$$g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

由题意可知 $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ 且

$$I, \text{构造函数 } G(x) = g(a) + g(x) - 2g\left(\frac{a+x}{2}\right)$$

(I).

在 (I) 式中由于 x 是自变量, 则相对来说 a 是一个固定的数,

对函数 $G(x)$ 两边求导, 则有 $G'(x) =$

$$g'(x) - 2\left(g'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right).$$

由于 $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ 且

$$\text{则 } G'(x) = \ln x + I - 2\left(\frac{1}{2} \ln \frac{a+x}{2} + \frac{I}{2}\right) =$$

$$\ln x - \ln \frac{a+x}{2}.$$

$$g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) < (b-a) \ln 2.$$

$$\text{综上, } 0 < g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) < (b-a) \ln 2.$$

$a) \ln 2$.

分析: 这是应用拉格朗日中值定理思想的一个例子(以下的例题将省略此部分的分析), 根据上述证明我们可以得到, $g(x)$ 可导, 且据观察就可以看出原题可以换成

$$g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(b) -$$

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a)\right)$$

$$\text{再进一步变形 } g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$\ln x - \ln \frac{a+x}{2} \quad \dots \quad |a+b| \quad \dots \quad |$$

极点、极线与圆锥曲线试题的命制

王文彬

(江西省抚州市第一中学, 344000)

极点与极线是高等几何中的重要概念, 当然不是《高中数学课程标准》规定的学习内容, 也不属于高考考查的范围, 但由于极点与极线是圆锥曲线的基本特征, 因此在高考试题中必然会有所反映, 自然也会成为高考试题的命题背景.

作为一名中学数学教师, 应当了解极点与极线的概念, 掌握有关极点与极线的基本性质, 只有这样, 才能“识破”试题中蕴含的有关极点与极线的知识背景, 进而把握命题规律.

1. 极点与极线的定义

定义 1 (几何定义) 如图 1, P 是不在圆锥曲线上的点, 过 P 点引两条割线依次交圆锥曲线于四点 E, F, G, H , 连接 EH, FG 交于 N , 连接 EG, FH 交于 M , 则直线 MN 为点 P 对应的极线.

若 P 为圆锥曲线上的点, 则过 P 点的切线即为极线.

由图 1 可知, 同理 PM 为点 N 对应的极线, PN

(1) 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$;

(2) 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$;

(3) 对于抛物线 $y^2 = 2px$, 与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $y_0 y = p(x_0 + x)$.

2. 极点与极线的基本性质

定理 1 (1) 当 P 在圆锥曲线 Γ 上时, 其极线 l 是曲线 Γ 在 P 点处的切线;

(2) 当 P 在 Γ 外时, 其极线 l 是曲线 Γ 从点 P 所引两条切线的切点所确定的直线(即切点弦所在直线);

(3) 当 P 在 Γ 内时, 其极线 l 是曲线 Γ 过点 P 的割线两端点处的切线交点的轨迹.

证明 (1) 假设同以上代数定义, 对 $\Gamma: Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ 的方程, 两边求导得 $2Ax + 2Cy y' + 2D + 2E y' = 0$, 解得 $y' = -\frac{Ax + D}{Cy + E}$, 于是曲线 Γ 的 P 点处的切线斜率为 $k = -\frac{Ax_0 + D}{Cy_0 + E}$, 故切

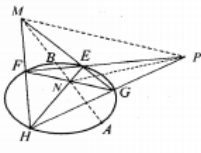


图 1

交比·调和点列·阿波罗尼斯圆·极线极点

金磊

(西安交大附中曲江校区, 710049)

中国分类号: O185.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)03-0006-04

(本讲适合高中)

2010年全国高中数学联赛加试第一题
题目为:

如图1, 已知锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O , K 是边 BC 上一点(不是边 BC 的中点), D 是线段 AK 延长线上一点, 直线 BD 与 AC 交于点 N , 直线 CD 与 AB 交于点 M . 求证: 若 $OK \perp MN$, 则 A, B, D, C 四点共圆.^[1]

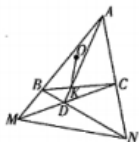


图1

本题颇有难度, 命题组提供的答案用的是反证法, 让有些人“匪夷所思”, 其实这是一系列射影几何中常见结论的自然“结晶”. 此类问题在国家队选拔考试中屡见不鲜. 本文拟系统地介绍交比、调和点列、完全四边形、阿波罗尼斯(Apollonius)圆、极线极点等射影几何的重要概念及应用, 抽丝剥茧、溯本求源, 揭示此类问题的来龙去脉, 并在文中给出此题的一种简单明了的直接证明.

点列 A, C, B, D 的交比.^[2]

性质1 线束的交比与所截直线无关.

定义2 交比为-1, 即 $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$ 的线束称为调和线束, 点列称为调和点列.

显然, 调和线束与调和点列是等价的, 即调和线束被任意直线截得的四点均为调和点列, 反之, 调和点列对任意一点的线束为调和线束.

性质2 调和点列常见变形(O 为边 CD 中点):

$$(1) \frac{2}{AB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC};$$

$$(2) OC^2 = OB \cdot OA;$$

$$(3) AC \cdot AD = AB \cdot AO;$$

$$(4) AB \cdot OD = AC \cdot BD.$$

性质3 一直线被调和线束中的三条平行分且仅当它与第四条线平行.

定义3 如图3, 凸四边形 $ABCD$ 各边延长交成的图形称为完全四边形 $ABCDEF, AC, BD$.



科技信息

高等数学在高考数学压轴题中的应用研究

腾冲县第一中学 罗仁章 保山学院数学学院 郭秀清

[摘 要] 通过对近几年高考数学压轴题中几道导数题的高等数学知识背景和解答方法, 揭示了这一类题的一些求解规律: 即分离变量后用导数、极值、最值(或换元)求解.

[关键词] 参数 变量 导数 极值

在高考压轴题中, 函数与导数的综合题高频率出现, 其中有一类是根据题中条件求参数的取值范围. 此类题的解答综合性强, 技巧性、灵活性大. 解答带有较强的机智性和考生选择解法上的机遇性, 解答需要知识、经验和智慧, 许多考生往往望而却步、彷徨不能, 最终无功而返. 这一类题蕴涵着高等数学的某个基本思想方法, 有高等数学的知识背景, 若我们能通过分离变量并假借一点不难的高等数学知识, 即把题目放在高观点下来审视, 则可使问题如长风破浪般迎刃而解.

本文试图从分离变量出发, 将问题化为下列四种情形之一进行解答:

(1) $f(x) < g(a)$ 恒成立, 化为 $[f(x)]_{\min} < g(a)$ 求解;(2) $f(x) \leq g(a)$ 恒成立, 化为 $[f(x)]_{\max} \leq g(a)$ 求解;(3) $f(x) > g(a)$ 恒成立, 化为 $[f(x)]_{\min} > g(a)$ 求解;(4) $f(x) \geq g(a)$ 恒成立, 化为 $[f(x)]_{\min} \geq g(a)$ 求解;

其中 x 为函数自变量(在其给定范围内取值), a 为参数^[3]. 如果函数 $f(x)$ 存在最大值或最小值, 则按上述方法求解; 如果函数 $f(x)$ 不存在最大值或最小值, 但能确定单调性及极限(或单侧极限), 则可寻求极限的方法求出函数的上确界或下确界, 然后用上确界或下确界代替最值求解. 如 $f(x) < g(a)$ 可化为 $\sup\{f(x)\} \leq g(a)$ 求解, $f(x) > g(a)$ 可化为 $\inf\{f(x)\} \geq g(a)$ 求解. 其中 $\sup\{f(x)\}$ 、 $\inf\{f(x)\}$ 分别表示 $f(x)$ 的上、下确界, 确定函数的单调性时可能要几次求导数^[4], 求极限时可能要用到高等数学中的洛比达法则. 本文分四种类型进行论述.

图.

解 当 $x=0$ 时, 不等式为 $0 \geq 0$, 这时 $a \in \mathbb{R}$.

当 $x \neq 0$ 时, 分离变量为 $a \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$, 设 $F(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$. $F(x) = \frac{xe^x - 2e^x + x + 2}{x^3}$, 令 $h(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$, $h'(x) = xe^x - e^x + 1$. $h'(x) = xe^x - e^x + 1 > 0$. $\therefore h'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, $h'(x) > h'(0)$, 而 $h'(0) = 0$. $\therefore h'(x) > 0$, 从而 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. $\therefore h(x) > h(0) = 0$. $\therefore h(x) > 0$. $\therefore F(x) > 0$. $\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数. $\therefore \inf\{F(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1) - x}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

综上所述, 所求实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

小结: 此类问题在给定的自变量范围内函数一般没有最值, 通常要先确定函数单调性, 然后用洛比达法则取极限确定上确界或下确界.

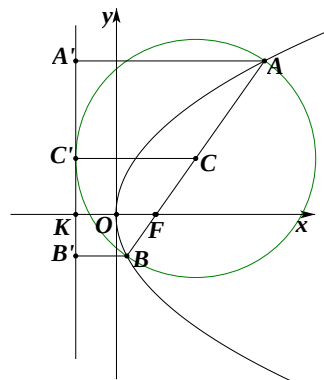
3. 分离变量后的函数含有对数函数

例3 2012年天津高考理科数学第20题) 已知 $f(x) = x - \ln(x+a)$ 的最小值为0, 其中 $a > 0$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若对任意的数 $x \in [0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值;

发现背景，提升能力



1. 以 AB 为直径的圆与准线 L 垂直;

$$2. x_1 x_2 = \frac{p^2}{4};$$

$$3. y_1 y_2 = -p^2;$$

$$4. \angle AC'B = 90^\circ;$$

$$5. \angle A'FB' = 90^\circ;$$

$$6. |AB| = x_1 + x_2 + p = 2 \left(x_3 + \frac{p}{2} \right) = \frac{2p}{\sin^2 \alpha};$$

$$7. \frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p};$$

8. A, O, B' 三点共线;

9. B, O, A' 三点共线;

$$10. S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2 \sin \alpha};$$

$$11. \frac{S_{\triangle AOB}^2}{|AB|} = \left(\frac{p}{2} \right)^3 \quad (\text{定值});$$

$$12. |AF| = \frac{p}{1 - \cos \alpha}; |BF| = \frac{p}{1 + \cos \alpha};$$

13. BC' 垂直平分 $B'F$;

14. AC' 垂直平分 $A'F$;

15. $C'F \perp AB$;

$$16. |AB| \geq 2p;$$

$$17. |CC'| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|);$$

$$18. k_{AB} = \frac{p}{y_3};$$

$$19. \tan \alpha = \frac{y_2}{x_2 - \frac{p}{2}};$$

$$20. |A'B'|^2 = 4|AF| \cdot |BF|;$$

$$21. |C'F| = \frac{1}{2}|A'B'|;$$

22. 切线方程: $y_0 y = m(x_0 + x).$



精编试题，选好载体

在可能的情况下多练习一些是好的，但贵在精选试题。

首先选题应结合《考试说明》的要求和近几年高考题的考查的方向去选，重点体现“三基”，体现“通性、通法”。

其次学生做题后的思考和总结非常重要，应引导学生每做一道题都要回想一下自己的解题思路，看看能不能一题多解，举一反三，并注意合理运算，优化解题过程。

第三对重点问题要舍得花时间，加强解题训练。

第四在复习过程中也要不断做一些应用题，来提高阅读理解能力和解决实际问题的能力，这是高考改革的方向之一。

精编试题，选好载体

一题多变的训练：

平面上一动点 P 到两定点 $O(0,0), A(3,0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$ ，求动点 P 的 轨迹方程。

变式 1：定比值 $\frac{1}{2}$ 改为 λ ，探求 P 的轨迹。

阿波罗尼斯圆

变式 2：求三角形 POA 的面积的最大值。

变式 3：(08 江苏) 已知 $AB=2, AC=\sqrt{2}BC$ ，求三角形 ABC 的面积的最大值。

在教学中的演变：给你两个定点，你加条件，写出能得到的结论……

(开放题，整合教材)

距离相等、距离之和、距离之差、距离之比、两斜率之积等等，得到不同的轨迹问题

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

(2013年新课标I卷理15)

设当 $x = \theta$ 时，函数 $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ 取得最大值，

则 $\cos \theta =$ _____.

解法 1: $f(x) = \sin x - 2 \cos x = \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin x - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x \right) = \sqrt{5} \sin(x - \varphi),$

其中 $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}},$

当 $x = \theta$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，即 $\theta - \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}),$

$$\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos \theta = \cos \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\sin \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

解法 2: 由题意，可得 $f(\theta) = \sin \theta - 2 \cos \theta = \sqrt{5},$

$$\text{由 } \begin{cases} \sin \theta - 2 \cos \theta = \sqrt{5} \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (\sqrt{5} \cos \theta - 2)^2 = 0,$$

$$\text{即 } \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

解法 3: 由题意，可得 $f(\theta) = \sin \theta - 2 \cos \theta = \sqrt{5}$ ，则 $f'(\theta) = \cos \theta + 2 \sin \theta = 0$ ，

$$\text{所以有方程组 } \begin{cases} \sin \theta - 2 \cos \theta = \sqrt{5} \\ \cos \theta + 2 \sin \theta = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

(2013年新课标I卷理15)

设当 $x = \theta$ 时，函数 $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ 取得最大值，

则 $\cos \theta =$ _____.

解法 4：由 $f(\theta) = \sin \theta - 2 \cos \theta = \sqrt{5}$ ，

由柯西不等式知： $(\sin \theta - 2 \cos \theta)^2 \leq |1^2 + (-2)^2|(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 5$ ，

当且仅当 $\frac{\sin \theta}{1} = \frac{\cos \theta}{-2}$ ，即 $\cos \theta = -2 \sin \theta$ 时取等号，

$$\begin{cases} \sin \theta - 2 \cos \theta = \sqrt{5} \\ \cos \theta + 2 \sin \theta = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

解法 5：

由题意 $f(\theta) = \sin \theta - 2 \cos \theta = \sqrt{5}$ ，知点 $(\sin \theta, \cos \theta)$ 在直线 $x - 2y = \sqrt{5}$ 上，

而 $(\sin \theta, \cos \theta)$ 又在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上，

即点 $(\sin \theta, \cos \theta)$ 是直线 $x - 2y = \sqrt{5}$ 与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的公共点，

显然直线 $x - 2y = \sqrt{5}$ 与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，

则点 $(\sin \theta, \cos \theta)$ 是直线 $x - 2y = \sqrt{5}$ 与单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切点，

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{5} \\ y = -2x \end{cases}, \text{ 可得切点的纵坐标为 } y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

(2013年新课标I卷理15)

设当 $x = \theta$ 时，函数 $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ 取得最大值，
则 $\cos \theta =$ _____.

解法 6：构造平面向量 $\overrightarrow{OA} = (\sin x, \cos x)$, $\overrightarrow{OB} = (1, -2)$ ，则

$$f(x) = \sin x - 2 \cos x = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \sqrt{5} \cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle.$$

当 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 同向时，函数 $f(x)$ 取得最大值，

结合三角函数的定义，可得 A 点的纵坐标为 $\cos \theta = \frac{y_B}{|\overrightarrow{OB}|} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



精编试题，选好载体

一题多解的训练：

例 1 若 $\cos \alpha + 2 \sin \alpha = -\sqrt{5}$, 则 $\tan \alpha = (\quad)$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 2

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) -2

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法一：

$$\text{联立 } \begin{cases} \cos \alpha + 2\sin \alpha = -\sqrt{5} \\ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \end{cases}, \text{ 消元, 得 } 5\sin^2 \alpha + 4\sqrt{5}\sin \alpha + 4 = 0,$$

$$\text{即 } (\sqrt{5}\sin \alpha + 2)^2 = 0, \text{ 从而得 } \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}, \text{ 故 } \tan \alpha = 2, \text{ 选 B.}$$

- 这是学习三角恒等式之后的必然，属于掌握知识的层面。
- 这是必须过关的入门之学。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法二：（“二合一”方法）

化为 $\sqrt{5}\sin(\alpha + \varphi) = -\sqrt{5}$ ，即 $\sin(\alpha + \varphi) = -1$ ，（其中 $\tan \varphi = \frac{1}{2}$ ）

所 $\alpha + \varphi = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$ （ $k \in \mathbb{Z}$ ），得 $\alpha = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi - \varphi$ ，

所以 $\tan \alpha = \tan\left(2k\pi + \frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = \frac{1}{\tan \varphi} = 2$ 。

➤这是学生容易想到的另一个方法，事实上并不是一个实战的好方法。我们平时的教学中要引导学生甄别一些方法的适用范畴。

➤这也是属于入门之学，可以要求学生会，但似乎现在对此要求降低了。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法三：（“齐次化”方法）

两边平方 $\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha \sin \alpha + 4\sin^2 \alpha = 5$,

或 $\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha \sin \alpha + 4\sin^2 \alpha = 5(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$

即 $(2\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 0$, 即 $\tan \alpha = 2$.

- 在学习三角求值过程中，“齐次化”是常用的方法。
- 教师要引导学生思考什么时候我们可以选择该方法。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法四：（联想）

变形 $\frac{-1}{\sqrt{5}}\cos\alpha + \frac{-2}{\sqrt{5}}\sin\alpha = 1$ ，比较 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ，

取 $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ ， $\sin\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ ，易知 $\tan\alpha = 2$ 。

- 这是学习三角恒等式之后对公式的深入理解，仍属于掌握知识的层面。
- 教师要引导学生多做这样的有益的变形，让学生的功夫“硬”起来。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法五：（联想）

注意向量内积结构式： $ax + by = (a, b) \cdot (x, y)$

所以 $\cos \alpha + 2 \sin \alpha = (1, 2) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，

设 $\vec{x} = (1, 2)$ ， $\vec{y} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，得 $\cos \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -1$ ，所以 $\vec{x} // \vec{y}$ ，

即 $(\cos \alpha, \sin \alpha) = \lambda(1, 2)$ ，故 $\tan \alpha = 2$ 。

➤能合理地把已学的知识通过“类比联想”整合起来，说明我们掌握的知识“活”了。

➤这样跨度的“联想”需要学生平时具备良好的思维习惯了。

精编试题，选好载体

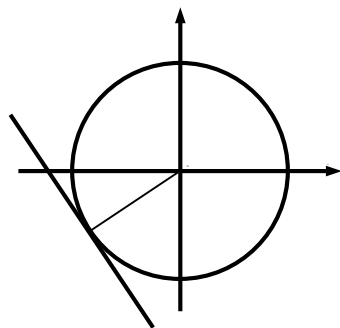
一题多解的训练：

解法六：（数形结合）

$$\text{设 } x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha, \quad \text{则 } \begin{cases} x + 2y = -\sqrt{5} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

而 $d = \frac{|-\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 1 = r$ ，故 直线与单位圆相切于点 $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，

$$\text{所以 } \tan \alpha = k_{OA} = -\frac{1}{k_l} = 2.$$



➤ “数形结合” 看似常用的方法，但学生并不会灵活应用，只有教师的长期坚持，才能感化学生，使之成为常态。

➤ 当学生在解决函数问题时，能把利用图像作为解题的首选时，功夫就获得了一次实质性的进步。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法七：（配对法）

$$\begin{cases} \cos \alpha + 2 \sin \alpha = -\sqrt{5} \\ \sin \alpha - 2 \cos \alpha = t \end{cases},$$

把上述两式平方相加，得 $t = 0$ ，即 $\tan \alpha = 2$ 。

- “配对思想”从高考这一层面看不是常用的方法。
- 这是学生学习公式 $\sin 2x + \cos 2x = 1$ 后对公式的深刻理解和自觉应用，缺乏教师长期的引领几乎难以达到。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法八：（导数工具）

设 $y = \cos \alpha + 2 \sin \alpha$

因为 $y_{\min} = -\sqrt{5}$ 的必要条件是 $y' = -\sin \alpha + 2 \cos \alpha = 0$ ，

故 $\tan \alpha = 2$ 。

- “导数” 应该是求极值的常用方法，但这个问题的最值隐藏得比较深。
- 这事实上是对导数、对极值等一系列知识的一种融会贯通。
- “不破楼兰终不还”，“灯火阑珊回首处”。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法九：（利用 **Cauchy** 不等式）

$$5 = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(1^2 + 2^2) \geq (\cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 = 5 ,$$

上式等号成立的充要条件是： $\frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{2}$ ， 即 $\tan \alpha = 2$.

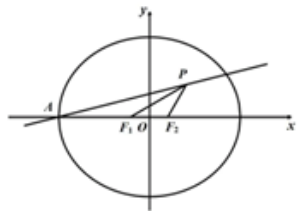
- 从不等到等的转化，体现了解题人所具备的灵气。
- 知识的拓展，可以使人的智慧得到提升。
- 这世上没有无缘无故的妙解。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

【2018 课标 2 卷理 12】

已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点， A 是 C 的左顶点，点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上， $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形， $\angle F_1F_2P = 120^\circ$ ，则 C 的离心率为 () .



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

解法一： 由题意： $A(-a, 0), P(2c, \sqrt{3}c)$ ，所以 $k_{AP} = \frac{\sqrt{3}c - 0}{2c + a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ，
即 $a = 4c$ ，所以 $e = \frac{1}{4}$ ，选 D。

解法二： 由题可得 PA 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+a)$ ， PF_2 的方程为 $y = \sqrt{3}(x-c)$ ，

可求解 $x_P = \frac{a+6c}{5}, y_P = \frac{\sqrt{3}}{5}(a+c)$ ，

又 $F_2(-c, 0), k_{PF_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{5}(a+c)}{\frac{a+6c}{5} + c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得 $e = \frac{1}{4}$ ，选 D。

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法三：在 $\triangle AF_2P$ 三角形中，由余弦定理可得：

$$\text{则 } |PA| = \sqrt{(a+c)^2 + (2c)^2 + 2c(a+c)} = \sqrt{7c^2 + a^2 + 4ac}$$

$$\tan \angle PAF_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \sin \angle PAF_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}} = \frac{1}{\sqrt{13}}, \text{ 又 } |PF_2| = 2c.$$

在 $\triangle APF_2, \triangle PF_1F_2$ 中利用等高建立等式，

$$\text{所以 } \sqrt{7c^2 + a^2 + 4ac} \times \frac{1}{\sqrt{13}} = 2c \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}c, \quad \text{所以 } e = \frac{1}{4}, \text{ 选 D.}$$

解法四：因为 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形， $\angle F_1F_2P = 120^\circ$ ，所以 $PF_2 = F_1F_2 = 2c$ ，

由余弦定理可知： $|PF_1| = 2\sqrt{3}c$ ，

$$\text{因为 } \sin \angle APF_1 = \sin(\angle PAF_1 + \angle AF_1P), \sin \angle PAF_1 = \frac{\sqrt{13}}{13}, \cos \angle PAF_1 = \frac{2\sqrt{39}}{13},$$

$$\text{所以 } \sin \angle APF_1 = \frac{\sqrt{39}}{26},$$

$$\text{在 } \triangle APF_1 \text{ 中，由正弦定理可知： } \frac{AF_1}{\sin \angle APF_1} = \frac{PF_1}{\sin \angle PAF_1}, \text{ 即 } \frac{a-c}{\frac{\sqrt{39}}{26}} = \frac{2\sqrt{3}c}{\frac{\sqrt{13}}{13}},$$

所以离心率为 $\frac{1}{4}$ ，选 D.

精编试题，选好载体

一题多解的训练：

解法五：因为 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形， $\angle F_1F_2P = 120^\circ$ ，所以 $PF_2 = F_1F_2 = 2c$ ，

由 AP 斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 得， $\tan \angle PAF_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ，所以 $\sin \angle PAF_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}$ ， $\cos \angle PAF_2 = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$

由正弦定理得 $\frac{PF_2}{AF_2} = \frac{\sin \angle PAF_2}{\sin \angle APF_2}$ ，所以 $\frac{2c}{a+c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\sin(\frac{\pi}{3} - \angle PAF_2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{13}}} = \frac{2}{5}$

所以 $a = 4c$ ，解得 $e = \frac{1}{4}$ ，选 D.



有效课堂，注重落实

选择合理的教学方法，复习中运用以学生为主的教学方式，能突出学生的学，调动学生学习的积极性，复习方法才是高效的。

采用“有讲必练（避免随意性），有练必批（了解学生），有批必评（讲解有针对性），有评必纠（落实为重），有纠必考（及时检测）”的复习方法，无论什么方法策略，只有学生动起手来，才能真正起到作用，所以调动学生的主动性是重中之重！检查、练习、考试、谈话、惩罚、表扬、评比、激励是常用手段。



有效课堂，注重落实

从教师的角度：精心设计 因材施教 分类推进 整体提高

从学生的角度：积极思考 适时交流 适当笔记 及时复习

➤给学生“思考”的时间，理性、独立

➤给学生“讨论”的空间，合作、探究

➤给学生说的权利，学生说题（四说）

（1）说考点；（2）说方法；（3）说过程；（4）说体会

（难点，易错点，拓展提升）



有效课堂，注重落实

课堂上的解题教学常见两种误区：

误区一：

学生思维参与度低，教师热衷单向讲授，甚至解法罗列。

误区二：

不追求深入理解概念、不突出落实通性通法，但追求一些对号入座的所谓解题规律、应试技巧。

两种现象都造成学生内化程度降低，过分依赖大量练习，题型覆盖，虽有效果，但投入和收效不成正比，试题一变，往往束手无策。导致解题效率低下。

有效课堂，注重落实

课堂上倡导“问题驱动”教学法

- 1.所谓“问题驱动”教学，是指教师在课堂教学中以一系列问题为载体，通过学生的独立思考、自主探究、合作讨论等方式来解决问题，从而达到学习学科知识、掌握相关方法、提高思维能力等的一种教学方法和策略。
2. 将“问题驱动”教学法，运用于高三基本概念的复习教学，就是围绕基本概念，按照一定逻辑结构，精心设计“问题串”，引发学生积极思考，在问题驱动下完成概念复习，促进对概念的深入理解，掌握知识本质，从而实现将学生的思维从识记、模仿等低层次活动向分析、综合等高层次活动的飞跃。

问题是数学的心脏

斜率之积为定值

1. 平面上一动点 $P(x, y)$ 与两点 $A(-2, 0), B(2, 0)$ 的连线的斜率之积是 $-\frac{3}{4}$ ，求点 P 的轨迹方程.

2. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上任一点 P 与两点 $A(-2, 0), B(2, 0)$ 的连线的斜率之积是_____

你发现了什么？

探究：（1）椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任一点 P 与两点 $A(-a, 0), B(a, 0)$ 的连线的斜率之积是_____

（2）椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任一点 P 与椭圆上两定点 $A(x_0, y_0), B(-x_0, -y_0)$ 的连线的斜率之积是_____

（3） P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点，直线 $y = 2x$ 与椭圆相交于两点 A, B ，则直线 PA, PB 的连线的斜率之积是 _____

学会总结 形成网络

选修2-1第41页例3

例3 如图 2.2-6, 设点 A, B 的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$. 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 求点 M 的轨迹方程.

分析: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 那么直线 AM, BM 的斜率就可以用含 x, y 的式子表示. 由于直线 AM, BM 的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 因此可以建立 x, y 之间的关系式, 得出点 M 的轨迹方程.

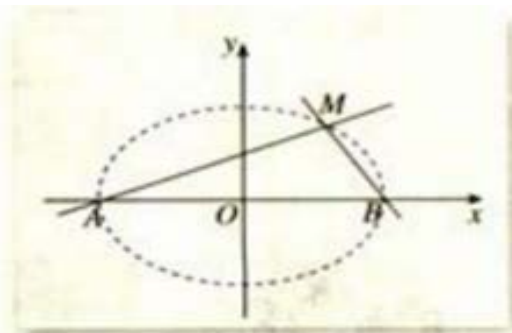


图 2.2-6

$$M \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1 (x \neq \pm 5)$$

学会总结 形成网络

变式 1: 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的关于原点对称的两点分别为 A, B , 点 P 在椭圆上且异于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 则椭圆的离心率为_____.

解析: 设 $A(x_0, y_0)$, $B(-x_0, -y_0)$, $P(x, y)$,

$$\text{则 } k_{AP}k_{BP} = \frac{y^2 - y_0^2}{x^2 - x_0^2} = \frac{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 - \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2\right)}{x^2 - x_0^2} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } e = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

不难发现一般规律: $k_{AP}k_{BP} = -\frac{b^2}{a^2}$

学会总结 形成网络

变式 2、椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2, -1]$, 那么直线 PA_1 斜率的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

B. $\left[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

D. $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

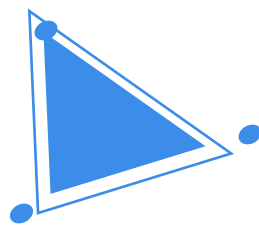
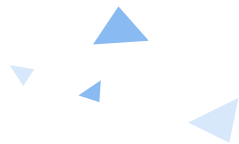
【解析】由变式 1 的结论, 知 $k_{PA_1} k_{PA_2} = -\frac{3}{4}$, 所以 $k_{PA_1} = -\frac{3}{4k_{PA_2}} \in \left[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right]$. 选 B.

学会总结 形成网络

变式 3、已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点 $P(1, \frac{3}{2})$, 过点 P 的直线 l_1, l_2 与椭圆 C 分别交于 A, B (不同于 P) 且它们的斜率 k_1, k_2 满足 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{3}{4}$, 则直线 AB 过定点_____.

【解析】由变式 1 的结论, A, B 关于原点对称, 即直线 AB 过定点 $(0,0)$.

02 学生复习建议





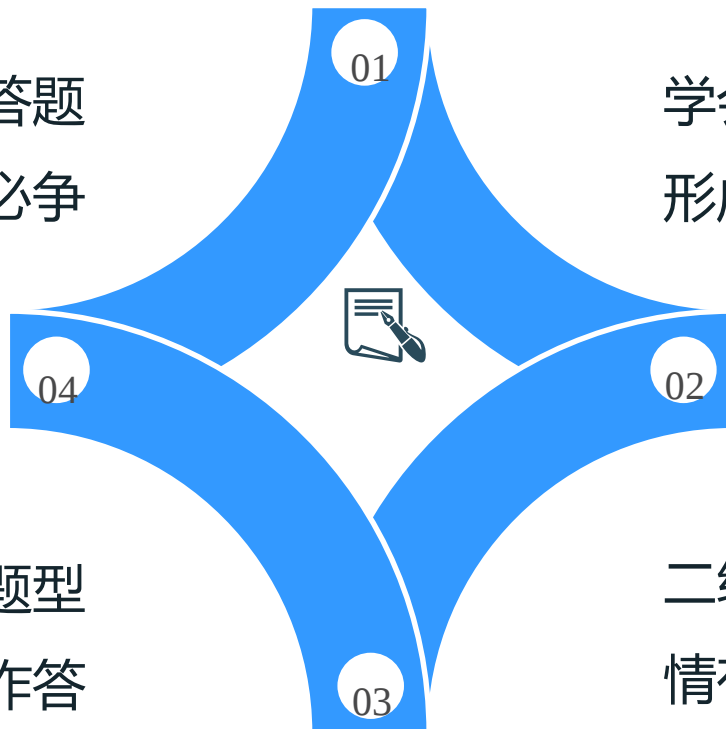
学生复习建议

规范答题
分分必争

学会总结
形成网络

二级结论
情有独钟

注重题型
快速作答





学会总结 形成网络

1.回归教材

- ✓ 完整的叙述每一个定义、法则、定理
- ✓ 独立完成重要公式推导和定理证明独立完成典型例题、习题的求解（证明）
- ✓ 尽可能地对典型例题、习题进行变式、引申和推广



学会总结 形成网络

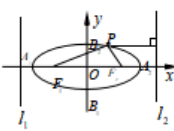
2.注重通性通法，淡化特殊技巧

在复习过程中，切忌“高起点、高强度、高要求”，要清楚基础题、中档题通过训练可以达到要求、拿到分数，而高档题通过训练还不一定达到效果，题海战术也未必起效。所以，要重视课本、重视基础，切实落实好“四基”（基础知识、基本技能、基本数学思想和方法、基本数学活动经验）。

例如：将直线方程代入圆锥曲线方程，整理成一元二次方程，再利用根的判别式、求根公式、韦达定理、两点间距离公式、点到直线的距离公式等可以编制出很多精彩的试题，突出解析几何设而不解的运算本色，也是解决解析几何问题的“通法”。

学会总结 形成网络

椭圆知识框图

第一定义:	1 平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于定长 ($> F_1F_2 $) 的点的轨迹		
第二定义:	2 平面内到定点 F 与到定直线 l 的距离之比等于常数 $e \in (0,1)$ 的点的轨迹		
标准方程	标准方程	椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$);	椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$);
	参数方程	$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$	$\begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$
图形			
几何性质	焦点坐标	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c), F_2(0,c)$
	顶点	$A_1(-a,0), A_2(a,0);$ $B_1(0,-b), B_2(0,b);$	$A_1(0,-a), A_2(0,a);$ $B_1(-b,0), B_2(b,0);$
	范围	$ x \leq a, y \leq b;$	$ x \leq b, y \leq a;$
	准线方程	$l_1: x = -\frac{a^2}{c}, l_2: x = \frac{a^2}{c}$	$l_1: y = -\frac{a^2}{c}, l_2: y = \frac{a^2}{c}$
	焦半径公式 $P(x_0, y_0) \in C$	$r_1 = PF_1 = a + ex_0,$ $r_2 = PF_2 = a - ex_0$	$r_1 = PF_1 = a + ey_0,$ $r_2 = PF_2 = a - ey_0$
	对称性	关于 x, y 轴均对称, 关于原点中心对称;	
	离心率	$e = \frac{c}{a} \in (0,1)$	
	a, b, c 的关系	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
	通径长:	$2 \frac{b^2}{a}$	
	焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$ 的面积: $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$ ($\angle F_1PF_2 = \theta$, b 为短半轴长)		

1 常用不等关系结论: 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

(1) $a > c$, (2) $a > b$, (3) $a - c \leq |PF| \leq a + c$, (4) $-a \leq x_0 \leq a$, (5) $-b \leq y_0 \leq b$

2 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$. 离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

准线到中心的距离为 $\frac{a^2}{c}$, 焦点到对应准线的距离 (焦准距) $p = \frac{b^2}{c}$.

过焦点且垂直于长轴的弦叫通径, 其长度为: $2 \frac{b^2}{a}$

$e \rightarrow 0$, 椭圆越圆, $e \rightarrow 1$, 椭圆越扁

3 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 焦半径公式及两焦半径与焦距构成三角形的面积:

$|PF_1| = e(x + \frac{a^2}{c}) = a + ex$, $|PF_2| = e(\frac{a^2}{c} - x) = a - ex$; $S_{\triangle PF_1F_2} = c |y_P| = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2}$.

当过短轴端点处时, $\angle F_1PF_2$ 最大, $S_{\triangle PF_1F_2}$ 的面积最大, 为 bc , $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆半径最大, $r = \frac{bc}{a+c}$

4 椭圆的内外部:

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$.

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

5 椭圆的切线方程:

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

(2) 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$.

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

6 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相交的条件是 $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2$.

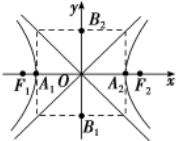
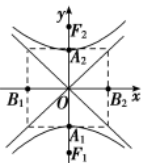
7 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相离的条件是 $A^2a^2 + B^2b^2 > C^2$.

8 若 M, N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点, 点 P 是椭圆上任意一点, 当直线 PM, PN 的斜率都存在,

并记为 k_{PM}, k_{PN} 时, $k_{PM} \cdot k_{PN} = -\frac{b^2}{a^2}$

学会总结 形成网络

双曲线知识框图

定义	1. 到两个定点 F_1 与 F_2 的距离之差的绝对值等于定长 ($< F_1F_2 $) 的点的轨迹 2. 到定点 F 与到定直线 l 的距离之比等于常数 e (>1) 的点的轨迹	
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)
图象		
几何性质	焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$
	顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$
	范围	$ x \geq a, y \in R$
	准线	$x = \pm \frac{a^2}{c}$
	渐近线方程	$y = \pm \frac{b}{a}x$
	焦半径 $P(x_0, y_0) \in C$	$ PF_1 = \pm(ax_0 + a), PF_2 = \pm(ax_0 - a)$ P 在左支上用“ $-$ ”, P 在右支上用“ $+$ ”
	对称性	关于 x, y 轴均对称, 关于原点中心对称
	离心率	$e = \frac{c}{a} \in (1, +\infty)$
	a, b, c 的关系	实轴长 $2a$, 虚轴长 $2b$; 焦距 $2c$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
	焦点三角形 $\triangle PF_1F_2$ 的面积: $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \cdot \cot \frac{\theta}{2}$ ($\angle F_1PF_2 = \theta$, b 为虚半轴长)	

1. 双曲线形成: 设点 A, B 的坐标分别为 $(-a, 0), (a, 0)$. 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $\frac{b^2}{a^2}$, 则点

$$M \text{ 的轨迹是 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. 过焦点且垂直于实轴的弦叫通径, 其长度为: $2\frac{b^2}{a}$

3. 过双曲线焦点最短的弦长是 $2a$ 或 $2\frac{b^2}{a}$, 哪个小取哪个

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, 准线到中心的距离为 $\frac{a^2}{c}$, 焦点到对应准

$$\text{线的距离 (焦准距)} p = \frac{b^2}{c}, \text{ 准线间距} = \frac{2a^2}{c}$$

$$(4) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 焦点到渐近线的距离总是 } b$$

$$\textcircled{2} \angle PF_1F_2 = \alpha, \angle PF_2F_1 = \beta, e = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

常用不等关系结论: 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(1) $c > a, c > b$,

(2) 当点在双曲线右支上时, F_1, F_2 分别为左右焦点, 则 $|PF_1| \geq c + a, |PF_2| \geq c - a$

(3) $|x_0| \geq a, (5) -b \leq y_0 \leq b$

5. 双曲线的方程与渐近线方程的关系:

(1) 若双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 渐近线方程: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$.

(2) 若渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0 \Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$.

(3) 若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有公共渐近线, 可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$.

($\lambda > 0$, 焦点在 x 轴上, $\lambda < 0$, 焦点在 y 轴上).

(4) 由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的一点 P 与左、右两焦点 F_1, F_2 构成 $\triangle PF_1F_2$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与边 F_1F_2 的切点的横坐标: P 在左支横坐标为 $-a$, P 在右支横坐标为 a .

$$\begin{aligned} |PF_1| - |PF_2| &= 2a \\ |PF_1| + |PF_2| &= 2c \end{aligned} \text{ 则 } |PF_1| = a + c, x_p = a$$

(5) P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点, F_1, F_2 为左右焦点, 过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PM 的垂线, 垂足

为 Q , 点 Q 的轨迹方程 $x^2 + y^2 = a^2$.

学会总结 形成网络

(6) 双曲线的切线方程:

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $a^2 A^2 - b^2 B^2 = C^2$.

相离的条件 $a^2 A^2 - b^2 B^2 < C^2$ 相切的条件是 $a^2 A^2 - b^2 B^2 > C^2$

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $a^2 B^2 - b^2 A^2 = C^2$

y 和 y 对应, x 和 x 对应 相离 $a^2 B^2 - b^2 A^2 < C^2$ 相切 $a^2 B^2 - b^2 A^2 > C^2$

(8) 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, 以 $P(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的斜率 $k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

(9) 若 M, N 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上关于原点对称的两个点, 点 P 是双曲线上任意一点, 当

直线 PM, PN 的斜率都存在, 并记为 k_{PM}, k_{PN} 时, $k_{PM} \cdot k_{PN} = \frac{b^2}{a^2}$

(10) 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 的直线与双曲线只有一个公共点的情况如下:

① P 点在两条渐近线之间且不含双曲线的区域内时, 有两条与渐近线平行的直线和分别与双曲线两支相切的两条切线, 共四条;

② P 点在两条渐近线之间且包含双曲线的区域内时, 有两条与渐近线平行的直线和只与双曲线一支相切的两条切线, 共四条;

③ P 在两条渐近线上但非原点, 只有两条: 一条是与另一渐近线平行的直线, 一条是切线;

④ P 为原点时不存在这样的直线;

(11) 已知点 P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 右支上一点, F_1, F_2 分别为双曲线的左右焦点, 且

$|PF_2| = \frac{b^2}{a}$, I 为三角形 PF_1F_2 的内心, 若 $S_{\triangle PF_1F_2} = S_{\triangle PF_1I} + \lambda S_{\triangle PF_2I}$ 成立, 则 λ 的值为 ()



A. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

B. $2\sqrt{3}-1$

C. $\sqrt{2}+1$

D. $\sqrt{2}-1$

【答案】D 试题分析: 因为 $|PF_2| = \frac{b^2}{a} = 2c$, $\therefore b^2 = 2ac$, 即 $c^2 - a^2 = 2ac$, 解之得 $a = (\sqrt{2}-1)c$,

又点 P 在双曲线的右支上, 由双曲线的定义可知 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2(\sqrt{2}-1)c$, 即

$|PF_1| - |PF_2| = (\sqrt{2}-1)|F_1F_2|$, 设三角形 PF_1F_2 内切圆半径为 r , 则

$\frac{r}{2} \cdot |PF_1| - \frac{r}{2} \cdot |PF_2| = (\sqrt{2}-1) \cdot \frac{r}{2} \cdot |F_1F_2|$, 即 $S_{\triangle PF_1I} - S_{\triangle PF_2I} = (\sqrt{2}-1)S_{\triangle PF_1F_2}$, 即

$S_{\triangle PF_1I} = S_{\triangle PF_2I} + (\sqrt{2}-1)S_{\triangle PF_1F_2}$, 所以 $\lambda = \sqrt{2}-1$, 故选 D.

学会总结 形成网络

抛物线知识框图

标准方程	$y^2 = 2px \ (p > 0)$	$y^2 = -2px \ (p > 0)$	$x^2 = 2py \ (p > 0)$	$x^2 = -2py \ (p > 0)$
图形				
范围	$x \geq 0, y \in \mathbb{R}$	$x \leq 0, y \in \mathbb{R}$	$y \geq 0, x \in \mathbb{R}$	$y \leq 0, x \in \mathbb{R}$
焦点	$(\frac{p}{2}, 0)$	$(-\frac{p}{2}, 0)$	$(0, \frac{p}{2})$	$(0, -\frac{p}{2})$
准线	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
焦半径	$ PF = x_0 + \frac{p}{2}$	$ PF = -x_0 + \frac{p}{2}$	$ PF = y_0 + \frac{p}{2}$	$ PF = -y_0 + \frac{p}{2}$
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点	(0,0)			
通径长	2p			
离心率	e = 1			

1. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦半径公式:

抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 焦半径 $|CF| = x_0 + \frac{p}{2}$, 过焦点弦长

$|CD| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = x_1 + x_2 + p \geq 2\sqrt{x_1 x_2} + p = p + p = 2p$ 焦点弦中通径最短, 为 $2p$.

2. 焦点弦: 对于 $y^2 = 2px$, 过焦点的弦 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$, $y_1 y_2 = -p^2$, $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$

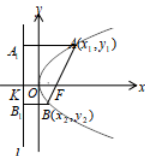
$$(3) \frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p}$$

(4) 若直线 AB 的倾斜角为 α , 则 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$.

(5) A, O, B 三点共线, A_1, O, B 三点共线.

(6) 焦点弦为直径的圆与准线相切. 以 AF 为直径的圆与 y 轴相切.

(8) $\angle AKF = \angle BKF$



过 $y^2 = 2px$ 的顶点作两条射线 OA, OB 交抛物线于 A, B , $OA \perp OB$, 则 AB 过定点 $(2p, 0)$, 作 $OQ \perp AB$ 于 Q , 点的轨迹方程为 $(x-p)^2 + y^2 = p^2$, 直径所对的圆周角是直角

过抛物线 $y^2 = 2px$ 上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 作两条切线, 切线方程分别为 $yy_1 = 2p \frac{x+x_1}{2}$,

$$yy_2 = 2p \frac{x+x_2}{2}, \text{ 设两切线的交点坐标 } (x, y), \text{ 则有 } \begin{cases} x = \frac{y_1 y_2}{2p} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

过抛物线 $x^2 = 2py$ 上两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 作两条切线, 切线方程分别为 $xx_1 = 2p \frac{y+y_1}{2}$,

$$xx_2 = 2p \frac{y+y_2}{2}, \text{ 设两切线的交点坐标 } (x, y), \text{ 则有 } \begin{cases} y = \frac{x_1 x_2}{2p} \\ x = \frac{x_1 + x_2}{2} \end{cases}$$

在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 中, 以 $P(x_0, y_0)$ 为中点的弦所在直线的斜率 $k = \frac{p}{y_0}$

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的内部 $\Leftrightarrow y^2 < 2px$ ($p > 0$).

点 $P(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的外部 $\Leftrightarrow y^2 > 2px$ ($p > 0$).

抛物线的切线方程

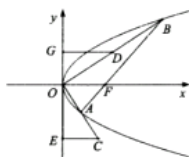
(1) 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

(2) 过抛物线 $y^2 = 2px$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0 y = p(x + x_0)$.

(3) 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $pB^2 = 2AC$.

如图, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的一条弦 AB 经过焦点 F , 取线段 OB 的中点 D , 延长 OA 至点 C , 使 $|OA| = |AC|$, 过点 C, D 作 y 轴的垂线, 垂足分别为 E, G , 则 $|EG|$ 的最小值为 4.

$$\text{解: } y_G - y_E = \frac{1}{2} y_B - 2 y_A, y_A y_B = -4$$





学会总结 形成网络

◆利用圆锥曲线的定义简化运算：

- (1) 利用定义判断动点的轨迹方程
- (2) 利用定义构造焦点三角形建立基本量之间的等量关系
- (3) 利用定义进行距离之间的转化求最值

◆利用平面图形的几何性质简化运算：

- (1) 利用圆的几何性质简化运算
- (2) 利用三角形内角平分线、中位线等性质简化运算
- (3) 利用线线平行、线段成比例等性质简化运算



学会总结 形成网络

◆利用直线或曲线方程的设法简化运算：

- (1) 直线方程 $x=ty+m$ 的设法避免考虑斜率不存在的情况并简化运算
- (2) 多条直线问题中设出关键直线方程达到简化运算的目的

◆灵活应用向量条件，把握向量本质，力求减少运算量：

- (1) 简单的向量条件坐标化
- (2) 通过化简复杂的向量条件，明确向量条件隐含的位置关系或数量关系

学会总结 形成网络

分式无理函数最值问题 突破策略

$$1. S = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2k^2 - 1}{(4k^2 + 1)^2}} \left(k > \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(1) 令 $t = 2k^2 - 1$, 转化为基本不等式求最值 ;

$$S = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{t}{4t^2 + 12t + 9}} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{4t + \frac{9}{t} + 12}} \leq 1$$

(2) 令 $t = 4k^2 + 1$, 转化为二次函数求最值 ;

$$S = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{t-3}{2t^2}} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{t} \right)^2}$$

(3) 利用导数求最值

换元的过程中一定要注意
新变量的取值范围

学会总结 形成网络

问题 2. 若四边形 $ABCD$ 的面积 S 与斜率 k 的关系式为: $S = \frac{24(k^2 + 1)^2}{(3k^2 + 2)(2k^2 + 3)} (k \in R)$,

求 S 的最小值.

$$(1) \text{换元: 令 } t = k^2 + 1, \text{ 则 } S = \frac{24t^2}{(3t-1)(2t+1)} = \frac{24t^2}{6t^2 + t - 1} = \frac{24}{6 + (\frac{1}{t}) - (\frac{1}{t})^2}$$

$$(2) \text{分离常数: } S = \frac{24(k^4 + 2k^2 + 1)}{6k^4 + 13k^2 + 6} = 4 \frac{6k^4 + 12k^2 + 6}{6k^4 + 13k^2 + 6} = 4 - \frac{4k^2}{6k^4 + 13k^2 + 6} \\ = 4 - \frac{4}{6k^2 + \frac{6}{k^2} + 13}$$

分析分子与分母的结构特征, 直接利用均值不等式放缩

$$S = \frac{24(k^2 + 1)^2}{(3k^2 + 2)(2k^2 + 3)} \geq \frac{24(k^2 + 1)^2}{(\frac{(3k^2 + 2) + (2k^2 + 3)}{2})^2} = \frac{96}{25}$$



学会总结 形成网络

平面向量数量积的6种形式:

(1) 定义形式: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

(2) 坐标形式: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

(3) 几何形式: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 就是 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影的乘积.

(4) 极化恒等式: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$

(5) 余弦定理形式: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} [\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$

(6) 对角线定理: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2) - (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2)}{2}$

学会总结 形成网络

三角形面积公式的几种表现形式：

$$(1) \quad S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \left(\sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \right), \text{ 弦长和距离待求;}$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot a, \text{ 弦长确定, 距离待求;}$$

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \theta, \text{ 角为定值时考虑使用;}$$

$$(4) \quad \text{三角形面积向量式 } S = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \right)^2 - \left(\vec{OA} \cdot \vec{OB} \right)^2}$$

$$(5) \quad \text{三角形面积顶点已知的坐标式: } S = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|$$

学会总结 形成网络

AB 为直径的圆过 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右顶点 $(a, 0)$, 则 l_{AB} 过定点 $((\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2})a, 0)$, 同理, 对于左顶

点 $(-a, 0)$, 则 l_{AB} 过定点 $(-(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2})a, 0)$, 对于上下顶点 $(0, b), (0, -b)$, 定点分别为 $(0, (\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2})b)$,

$$(0, -(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2})b)$$

对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上异于右顶点的两动点 A, B , AB 为直径的圆过右顶点 $(a, 0)$, 则 l_{AB}

过定点 $((\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2})a, 0)$, 同理, 对于左顶点 $(-a, 0)$, 则 l_{AB} 过定点 $(-(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2})a, 0)$, 对于上下顶点

$$(0, b), (0, -b), \text{ 定点分别为 } (0, (\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2})b), (0, -(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2})b)$$

学会总结 形成网络

例：直线 $l: y = kx + mk (k \neq 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于不同的两点 M, N (M, N 异于椭圆的左右顶点)，若以

MN 为直径的圆过椭圆 W 的右顶点 A ，求证：直线 l 过定点，并求出该定点。

直线过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$ AB 为直径的圆过 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右顶点 $(a, 0)$ ，则 l_{AB} 过定点 $((\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2})a, 0)$ ， $(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2})a = \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7}$

证明：联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$ 消 y 得： $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$ ，设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ， $\Delta = (8km)^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 12) > 0$ ，

即 $m^2 < 3 + 4k^2$ ， $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}$ ， $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}$ ，... (9分) $\overrightarrow{AM} = (x_1 - 2, y_1)$ ， $\overrightarrow{AN} = (x_2 - 2, y_2)$ ，

若以 MN 为直径的圆过椭圆 W 的右顶点 A ，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$ ，即 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$ ，... (11分)

展开整理得： $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 + k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0$ ，即 $\frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} - 2(-\frac{8km}{3 + 4k^2}) + 4 + k^2(\frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}) + km(-\frac{8km}{3 + 4k^2}) + m^2 = 0$ ，

通分化简得 $\frac{7m^2 + 16km + 4k^2}{3 + 4k^2} = 0$ ，即 $7m^2 + 16km + 4k^2 = 0$ ，分解得 $(7m + 2k)(m + 2k) = 0$ ，得 $7m + 2k = 0$ 或 $m + 2k = 0$ ，即 $m = -\frac{2k}{7}$ 或 $m = -2k$ ，

当 $m = -\frac{2k}{7}$ 时，直线 $y = kx + m = k(x - \frac{2}{7})$ ，即直线过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$

学会总结 形成网络

逆用函数奇偶性,可代入定义域中的特值,一般情况下有几个参数代入几个特值。奇函数在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$

(2007 年新课标全国卷 14) 设函数 $f(x) = \frac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】: 法一: 代入 -1 、 1 可得 $a = -1$;

法二: 秒杀技巧: 只需 $(x+1)(x+a)$ 为偶函数, 二次函数为偶函数要求一次项系数为 0 , 即 $a = -1$.

(2015 年新课标全国卷 I13) 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】: 可知 $g(x) = \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为奇函数, 由 $g(0) = 0$ 得 $a = 1$.

(高考题) 若 $f(x) = \ln(e^{3x} + 1) + ax$ 是偶函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ (高考题) 若函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 2a^2})$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】: 由 $f(-\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3})$ 得 $a = -\frac{3}{2}$.

【解析】: 由 $f(0) = \log_a \sqrt{2a^2} = 0$, 得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

学会总结 形成网络

函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2x^2 + x}{2x^2 + \cos x}$ 的最大值为 M ，最小值为 m ，则 $M+m=$ _____.

解析：分子和分母同次的特点，分子展开，得到部分分式， $f(x) = 1 + \frac{x + \sin x}{2x^2 + \cos x}$ ，

又 $f(x)-1$ 为奇函数，设 $x=t$ 时，最大值为 $f(t)$ ，

则 $M-1=f(t)-1$ ， $m-1=-(M-1)$ ，所以 $M+m=2$ 。

答案：2

椭圆中的垂径定理 (2013年新课标I卷理)

(2013 课标全国 I, 理 10) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$, 过点 F 的直线交 E 于 A, B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$, 则 E 的方程为().

A. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ C. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$ D. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}. \text{ 又 } \because a^2 - b^2 = 9, \therefore a^2 = 18, b^2 = 9. \therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1. \text{ 故选 D.}$$



学会总结 形成网络

2011 理 (7) 设直线 l 过双曲线 C 的一个焦点, 且与 C 的一条对称轴垂直, l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|$ 为 C 的实轴长的 2 倍, 则 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

椭圆、双曲线的通径为 $\frac{2b^2}{a}$



学会总结 形成网络

2013 理 (4) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 ()

A. $y = \pm \frac{1}{4}x$

B. $y = \pm \frac{1}{3}x$

C. $y = \pm \frac{1}{2}x$

D. $y = \pm x$

$$e^2 = k^2 + 1$$



学会总结 形成网络

2014 理 (4) 已知 F 为双曲线 $C: x^2 - my^2 = 3m (m > 0)$ 的一个焦点, 则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. $\sqrt{3}m$

D. $3m$

双曲线的焦点到渐近线的距离为 b



学会总结 形成网络

$\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, SC 为球 O 的直径, 且 $SC = 2$, 则

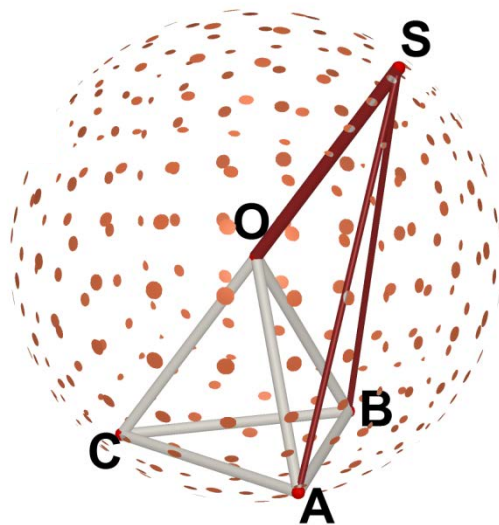
A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

正四面体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$



学会总结 形成网络

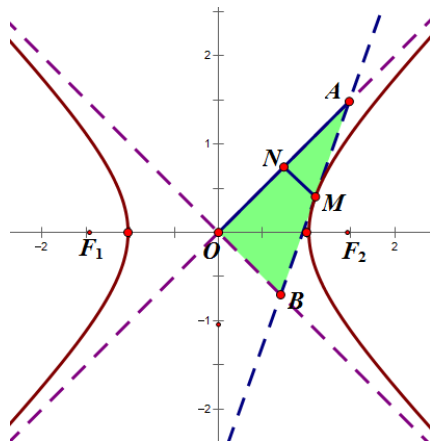
(2016 年广州市二模 16 题)

已知点 O 为坐标原点，点 M 在双曲线 $C: x^2 - y^2 = \lambda$ (λ 为正常数) 上，过点 M 作双曲线 C 的某一条渐近线的垂线，垂足为 N ，则 $|ON| + 2|MN|$ 的最小值为_____.

结论：双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点到两条渐近线的距离的乘积为定值 $\frac{a^2 b^2}{c^2}$



学会总结 形成网络



$$\because |ON| \cdot |MN| = \frac{1}{2}ab = \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore |ON| + 2|MN| \geq 2\sqrt{|ON| \cdot 2|MN|} = 2\sqrt{\lambda}$$



学会总结 形成网络

3.加强限时训练

专题练与整体练相结合，对重点、热点问题不断强化、反复练习、落实到位，同时也要注意注重整体试卷在单位时间内的练习。



注重题型 快速作答

高中数学各部分内容中重难点：

- 函数中的对称性，周期性，奇偶性，图像之间的关系
- 三角函数中的角度、函数名称的变换技巧
- 三角函数的图像变换问题
- 解三角形问题中已知一边和其对角，求三角形面积，周长或其它表达式的最值问题
- 数列中的隔项处理方法
- 立体几何中的棱柱棱锥的外接球问题
- 解析几何中的离心率求法
- 用导数研究函数的切线，最值、极值、单调性、零点问题、恒成立存在性问题
- 概率中的二项分布与超几何分布的区别
- 概率中的比赛模型、抽取模型、检验模型的处理方法
- 极坐标与参数方程中的直线参数方程的标准与非标准形式， t 的几何意义
- 不等式选讲中含绝对值不等式的最值问题



注重题型 快速作答

选择题、填空题在考试中比例较大，分值较高，在高考成绩中占有举足轻重的地位，其正确率和速度都直接影响高考成绩。

每年高考填选题的最后两题，都具有把关的性质，以能力型问题为主，有一定的难度。这些问题往往背景新颖，或较为抽象。但这些题有很多时候不是死算得到的，而是以代入检验、特殊化、排除法等方法技巧性的求出。

注重题型 快速作答

方法1: 特殊法: 包括特殊值、特殊图形、特殊函数

1. 【2015 高考新课标 1, 理 12】设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[-\frac{3}{2e}, 1)$

B. $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$

C. $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$

D. $[\frac{3}{2e}, 1)$

$f(0) = a - 1 < 0$, 故唯一的整数就是 0, 由 $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} 2a - 3\frac{1}{e} \geq 0 \\ e \geq 0 \end{cases}$, $\therefore a \geq \frac{3}{2e}$

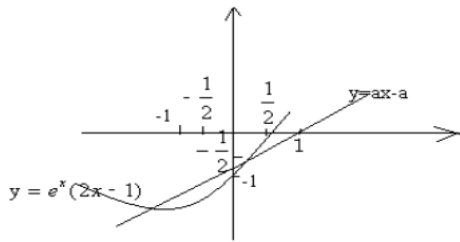
再接着证明, 当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) = e^x(2x+1) - a > 0$, $f(x)$ 为增函数

当 $x \leq -1$ 时, $f'(x) = e^x(2x+1) - a < 0$, $f(x)$ 为减函数 故选 D

【解析】设 $g(x) = e^x(2x-1)$, $y = ax - a$, 由题知存在唯一的整数 x_0 , 使得 $g(x_0)$ 在直线 $y = ax - a$ 的下方. 因为 $g'(x) = e^x(2x+1)$, 所以当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$, 所以当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,

$[g(x)]_{\max} = -2e^{-\frac{1}{2}}$, 当 $x = 0$ 时, $g(0) = -1$, $g(1) = 3e > 0$, 直线 $y = ax - a$ 恒过 $(1, 0)$ 斜率且 a , 故 $-a > g(0) = -1$, 且

$g(-1) = -3e^{-1} \geq -a - a$, 解得 $\frac{3}{2e} \leq a < 1$, 故选 D.



注重题型 快速作答

2. 已知函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $f(1) = e$, 对任意实数 x 都有 $2f(x) - f'(x) > 0$, 则不等式 $\frac{f(x)}{e^x} < e^{x-1}$ 的解集为_____.

解: 令 $f(x) = e^x$, 它满足条件, 则可得到 $\frac{e^x}{e^x} < e^{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$

3. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是

A. $[-2, 2]$

B. $[-1, 1]$

C. $[0, 4]$

D. $[1, 3]$

令 $f(x) = -x$, 它满足条件, $-1 \leq 2 - x \leq 1$, 可得 $1 \leq x \leq 3$



注重题型 快速作答

3. 在 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C 所对的边, B 是 A 和 C 的等差中项, 则 $a+c$ 与 $2b$ 的大小关系是()

A. $a+c>2b$

B. $a+c<2b$

C. $a+c\geq 2b$

D. $a+c\leq 2b$

不妨令 $A=B=C=60^\circ$, 则可排除 A、B, 再令 $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $C=90^\circ$, 可排除 C, 故选 D.

方法2：极限法

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边长分别为 a, b, c , 若 $c - a$ 等于 AC 边上的高, 那么 $\sin \frac{C-A}{2} + \cos \frac{C+A}{2}$ 的值是 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. -1

利用极限分析, 当 $A \rightarrow 0^\circ$ 时, 点 $C \rightarrow A$, 此时高 $h \rightarrow 0, c \rightarrow a$, 那么 $B \rightarrow 180^\circ$, $A \rightarrow 0^\circ$ 所以 $\sin \frac{C-A}{2} + \cos \frac{C+A}{2} \rightarrow \sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$, 选 A

注重题型 快速作答

(2014•太原一模) 过 x 轴上点 $P(a, 0)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 8x$ 交于 A, B 两点, 若 $\frac{1}{|AP|^2} + \frac{1}{|BP|^2}$ 为

定值, 则 a 的值为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

取两条特殊的直线, 过 $P(a, 0)$ 垂直于 x 轴的直线 $x = a$, 可得, $A(a, 2\sqrt{2a}), B(a, -2\sqrt{2a})$,

$\frac{1}{|AP|^2} + \frac{1}{|BP|^2} = \frac{1}{8a} + \frac{1}{8a}$, 取一条与 x 轴重合直线, 我们发现这条直线与 $y^2 = 8x$ 只有一个交点

$(0, 0)$, 这是就用极限的思想, 相当于另一个交点在无限远处, $\frac{1}{|AP|^2} + \frac{1}{|BP|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\infty}$, 故 $\frac{1}{8a} + \frac{1}{8a} = \frac{1}{a^2}$,

解得 $a = 4$

方法3: 数形结合法

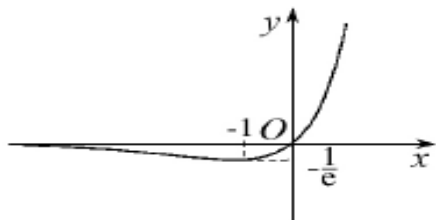
在 $\triangle ABC$ 中, 若对任意的 $\lambda \in R$, 都有 $|\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}| \geq |\overrightarrow{BC}|$, 则 $\triangle ABC$ ()

A. 一定为锐角三角形 B. 一定为钝角三角形 C. 一定为直角三角形 D. 可以为任意三角形

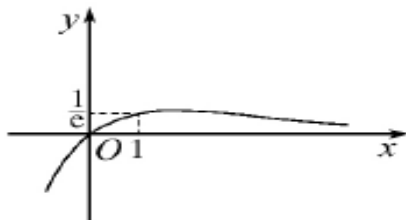
根据向量减法的几何意义, $\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - (-\lambda \overrightarrow{AC})$,

在上 AC 取一点 D , 使 $\overrightarrow{AD} = -\lambda \overrightarrow{AC}$, 由 $\overrightarrow{AB} - (-\lambda \overrightarrow{AC})$ 的几何意义可知, $|\overrightarrow{AB} - (-\lambda \overrightarrow{AC})| = |\overrightarrow{AD}|$, 由 $|\overrightarrow{AD}| \geq |\overrightarrow{BC}|$, 当 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ 时, 满足题意, 则角 C 为直角. 故 $\triangle ABC$ 一定为直角三角形

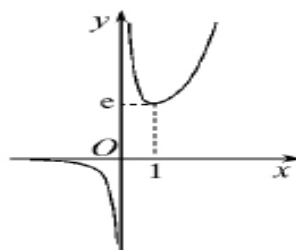
记忆几个重要函数图像



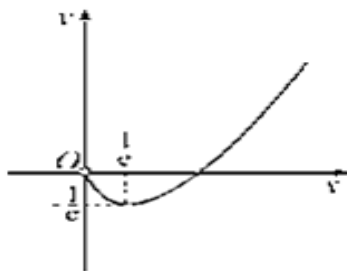
① $y = x \cdot e^x$



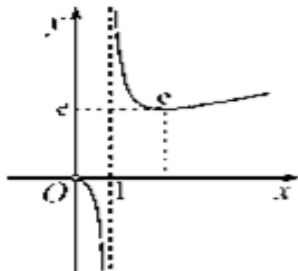
② $y = \frac{x}{e^x}$



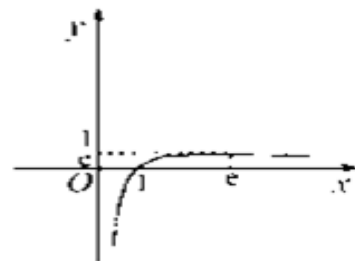
③ $y = \frac{e^x}{x}$



④ $y = x \cdot \ln x$



⑤ $y = \frac{x}{\ln x}$



⑥ $y = \frac{\ln x}{x}$



注重题型 快速作答

熟记一些数据 提高运算能力

(1) 平方数

(2) 立方数

(3) $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$

勾股数: 3,4,5 6,8,10 5,12,13, 7,24,25

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414, \quad \sqrt{3} \approx 1.732, \quad \sqrt{5} \approx 2.236$$

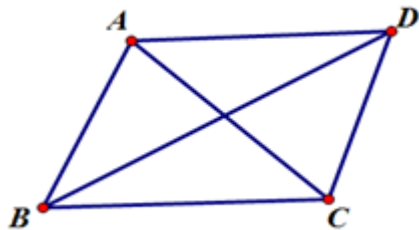
$$\ln 2 \approx 0.693, \ln 3 \approx 1.099 \quad e \approx 2.7.828$$

注重题型 快速作答

提高运算能力

在平行四边形 $ABCD$ 中，

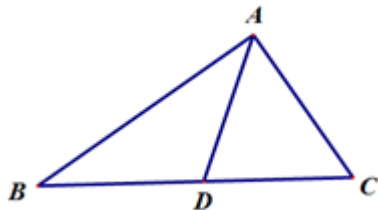
$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$



三角形中线长定理：

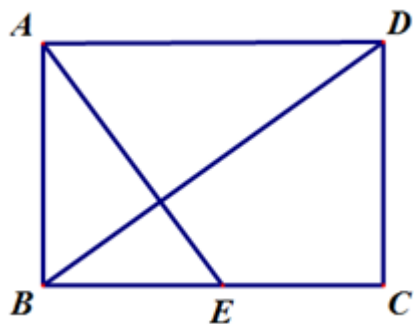
$\triangle ABC$ 中， AD 是中线，则有

$$4AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$$

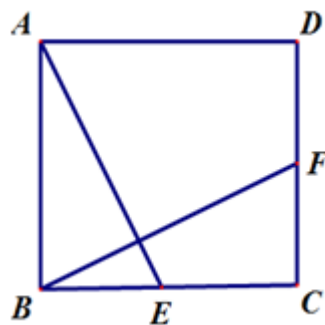


提高运算能力

在矩形 $ABCD$ 中, $BC = \sqrt{2}AB$,
 E 是 BC 的中点, 则有 $AE \perp BD$.



正方形 $ABCD$ 中, E, F 是 BC, CD 的中点,
则有 $AE \perp BF$.





规范答题 分分必争

规范的答题习惯，能让你的整体卷面更整洁，增加印象分，并且让你在作答的过程中，思路清楚有效率。

规范的答题习惯，可以帮助你多得分，至少不会失去一些应得分。



规范答题 分分必争

- **思路规范**——常规题型很快找到最优解题思路、解题方法。
- **运算规范**——准确、简洁、快速，掌握必要的运算技巧，立足一次成功。
- **表达规范**——步骤齐全（不多不少）、表达准确、推理清楚。
- **书写规范**——书写工整、字迹清晰、卷面整洁。



规范答题 分分必争

- **规范解题能力**，解决“会而不对，对而不全”的现象。
 - ✓ 会做但计算或变形出错；
 - ✓ 会做但使用公式或定理出错（记不牢、记错）；
 - ✓ 会做但求出来的结果不是所求（如求单调增区间而求出了单调减区间）；
 - ✓ 会做但审题不清导致错误（忘掉题目条件，如在锐角三角形中，“锐角”两个字没有看到）；
 - ✓ 大致思路有，但思维不够严谨，导致丢掉某种情况。



规范答题 分分必争

对“对而不全”的认识：

对是指最终的结果对，不全是指结果和答案一样但得到的分数不是满分，对而不全的核心问题是解题过程中思维不够严密，或表达不够规范或没有条理性.

- 填空题中不等式的解中不写集合符号，填写“正确的序号”写成了“数字”；
- 解答题中跳步多，没有说明原因直接得到了结果导致扣分；
- 分类不清楚或丢掉某个分类导致丢分。



规范答题 分分必争

1.答题工具：

- ①答**选择题**时，必须用**合格的2B铅笔**填涂，如需要对答案进行修改，应使用绘图橡皮轻擦干净，注意不要擦破答题卡。
- ②禁止使用涂改液、修正带或透明胶带改错。
- ③**非选择题**必须用**0.5毫米黑色签字笔**作答，**作图题**可先用铅笔绘出，确认后，再用0.5毫米黑色签字笔描清楚。



规范答题 分分必争

2. 答题位置：

按题号**在指定的答题区域内作答**，切不可超出黑色边框，超出黑色边框的答案无效。如需对答案进行修改，可将需修改的内容划去，然后紧挨在其上方或其下方写出新的答案，修改部分在书写时与正文一样，不能超过该题答题区域的黑色矩形边框，否则修改的答案无效。

关键结论写在**醒目**的位置



规范答题 分分必争

3.书写格式：

(1) **解与解集**：方程的结果一般用解表示(除非强调求解集)；**不等式**、三角方程的结果一般用解集(或区间)表示，三角方程的通解中必须加 $k \in \mathbb{Z}$.在写区间或集合时，要正确地书写圆括号、方括号或花括号，区间的两 endpoints 之间、集合的元素之间用逗号隔开.

例 1. 已知 $f(x) = a \sin 2x + b \cos 2x$ (a, b 为常数), 若对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) \geq f(\frac{5\pi}{12})$, 则方程

$f(x) = 0$ 在区间 $[0, \pi]$ 内的解为 .

正确: $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{2\pi}{3}$; **错误:** $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right\}$



规范答题 分分必争

4.解题过程：

- 整洁美观、逻辑思路清晰、概念表达准确、答出关键语句和关键词.
- 对容易题要详写，过程复杂的试题要简写，答题时要会把握得分点.
- 先追求做对，再追求做完.

避免“会而不对，对而不全”



规范答题 分分必争

几点答题小策略：

5.注意加强分段得分技术：

①缺步解答:解题中遇到一个很难的问题,实在啃不动,一个明智的策略是,将它分解为一系列的子问题,先解决问题的一部分,把这种情况反映出来,说不定起到“柳暗花明”的效果。

谨记：能做几步算几步,能解决到什么程度就表达到什么程度,最后虽不能拿满分,但部分分总是可以拿的。



规范答题 分分必争

几点答题小策略：

5注意加强分段得分技术：

②跳步解答：解题过程卡在某一过度环节上时常见的。这时，我们可以先承认中间结论，往后推，看能否得到结论。如果不能，说明这个途径不对，立即改变方向；如果能得到预期结论，就回过头来，集中力量攻克这一“卡壳处”。由于考试时间的限制，“卡壳处”的攻克来不及了，那么可以把前面的写下来，再写“证实某步之后，继续有……”一直做到底，这就是跳步解答。也许，后来中间步骤又想出来了，这时不要乱七八糟插上去，可补在后面，“事实上，某步可证明或演算如下”，以保持卷面的工整。

若题目有两问，第一问想不出来，可把第一问作“已知”，先做第二问，这也是跳步解答。



规范答题 分分必争

几点答题小策略：

5.注意加强分段得分技术：

③退步解答：“以退求进”是一个重要的解题策略,如果我们不能马上解决的所面临的问题,那么可以从一般到特殊,从抽象到具体,从复杂到简单,从整体退到部分,从较强的结论退到较弱的结论,总之退到一个能够解决的问题上来。



规范答题 分分必争

几点答题小策略：

5.注意加强分段得分技术：

④辅助解答：一道题目的完整解答，既有主要的实质步骤，也有辅助性的步骤，实质性的步骤找不到，找辅助解答的步骤也是明智的，有些甚至是必不可少的。辅助解答的内容十分广泛，如准确作图，将题目中的条件翻译成数学表达式等。对于选择题，“大胆猜测”也是一种辅助解答，实际上猜测也是一种能力。

谨记：没有办法时数形结合也可以做解答题，但要加上必要的文字说明及分析过程。



规范答题 分分必争

几点答题小策略：

6.注意加强计算能力：

计算能力是高考数学考查的一项基本能力，在评卷过程中，我们经常看到考生解答的方法和思路都正确，但就是计算出错。很多解答题都是多步计算，中间步骤的计算出错会直接导致后续解答相应出错，造成严重丢分。一句话：“不是不会做，而是计算错！”

谨记：计算过程最好在草稿纸上留有痕迹(要计划使用草稿纸，以便于复查)，尽量减少口算。



规范答题 分分必争

谨记：

基本概念仔细推敲；

基本题型熟记于心；

基本图形得心应手；

基本方法灵活应用；

基本思路融会贯通；

基本计算精准迅速。



规范答题 分分必争

只要把你会做的题都做对，你就是最成功的人！



谢 谢!